Workshop i gruppeteori

Jonas Nipgaard Dissing (jond@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 19. maj 2026

Introduktion til workshoppen

Velkommen til workshop i gruppeteori. Vi vil først se på hvordan man regner med nogle eksempler på grupper. Vi vil derefter se på hvordan man formelt definerer en gruppe.

1 Opfriskning på mængdelære

Det følgende afsnit vil ikke blive gennemgået, men er tænkt som opslagsværk hvis man vil slå noget op. De begreber indenfor mængdelæren som det ikke forventes at I har set før vil blive introduceret lige før vi skal bruge dem. Dette afsnit er ikke tænkt som en første introduktion til mængdelære, men rettere en genopfriskning.

Definition 1.1. En mængde er en samling af elementer. Vi kan skrive mængder på formen $\{elementer\}$ og $\{elementer \mid \text{betingelser}\}$

Definition 1.2. Lad A være en mængde og x et element. Hvis x er et element i A skriver vi $x \in A$.

Definition 1.3. Den tomme mængde (skrevet $\emptyset$) er mængden givet ved $\{\}$

Eksempel 1.4.

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,0,1,2,\dots\}$

Definition 1.5. En funktion $f : A \to B$ tilordner hvert element i A (definitionsmængden) til et element i B (værdimængden).

Definition 1.6. En funktion $f : A \to B$ er bijektiv hvis alle elementer i B rammes af præcis et element fra A.

Definition 1.7. Lad $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være funktioner. Da er $g \circ f : A \to C$ givet ved $g \circ f(x) = g(f(x))$

Definition 1.8. Lad $f : A \to B$ være en funktion. An funktion $g : B \to A$ er invers til f hvis $f \circ g(y) = y$ og $g \circ f(x) = x$. I det tilfælde kan vi skrive g som f^{-1}.

Proposition 1.9. *En funktion er bijektiv hvis og kun hvis den har en invers.*

2 Cykliske grupper

Definition 2.1. Tag en ting a. Vi definerer mængden $C_n = \{ma \mid m \in \mathbb{Z}\}$ hvor $(kn + m)a = ma$ for alle $k,m \in \mathbb{Z}$. Vi definerer operationen $\oplus$ på C_n ved

$$ma \oplus ka = (m + k)a$$

Vi kalder C_n med $\oplus$ den cykliske gruppe af orden n.

Bemærkning 2.2. Vi skriver ofte resultatet af de udregninger vi laver med $\oplus$ som ma hvor m er det mindste positive tal der passer. Ofte skriver vi bare m i stedet for ma.

Eksempel 2.3. Vi kigger på C_5. Her er mængden $\{0a,1a,2a,3a,4a\}$. Vi kan regne

$$2a \oplus 1a = 3a$$

og

$$3a \oplus 4a = 7a = 2a$$

Vi vil ofte bare skrive $C_5 = \{0,1,2,3,4\}$ og

$$2 \oplus 1 = 3$$

og

$$3 \oplus 4 = 7 = 2$$

2.1 Opgaver

Opgave 2.1:
Betragt C_2. Udregn følgende

1) $1 \oplus 1$

2) $1 \oplus 1 \oplus 1$

Opgave 2.2:
Betragt C_6. Udregn følgende

1) $1 \oplus 1$

2) $1 \oplus 3$

3) $4 \oplus 5$

4) $2 \oplus 4$

Opgave 2.3:
Betragt C_5. Find x i de nedenstående udtryk

1) $1 \oplus x = 0$

2) $3 \oplus x = 1$

3) $x \oplus 4 = 1$

3 Permutationer

Definition 3.1. Lad Ω være en mængde. Da er S_Ω mængden $\{f : \Omega \to \Omega \mid f \text{ er bijektiv}\}$. Vi lader $\circ$ være funktionssammensætning. Vi kalder S_Ω med $\circ$ den symmetriske gruppe over Ω. Vi kalder elementerne i S_Ω for permutationer.

Hvis Ω er endelig med n elementer vil vi ofte skrive $\Omega = \{1,2,\dots,n\}$, og S_Ω som S_n. Vi kalder dette den symmetriske gruppe af orden n.

Vi kigger på S_n. Vi vil skrive et element $\sigma \in S_n$ på formen $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix}$. Det skal forståes som at $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ for $i < m$ og $\sigma(a_m) = a_1$ for alt mellem parenteserne. Vi undlader ofte at skrive de parenteser der kun har en ting i dem.

Bemærkning 3.2. Funktionen $\mathrm{id} \in S_\Omega$ givet ved $\mathrm{id}(x) = x$ skrives ofte som 1 i den her kontekst.

Eksempel 3.3. Vi kigger på S_5. Lad $\sigma \in S_5$ være givet ved

$$\sigma(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 5 & n = 4 \\ 4 & n = 5 \end{cases}$$

Vi kan skrive σ som $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Vi lader $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ og regner $\sigma \circ \tau$. Vi lader ofte være med at skrive $\circ$, så vi har

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3.1 Opgaver

Opgave 3.1:

Betragt S_4. Udregn

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

Opgave 3.2:

Betragt S_5. Find x i de nedenstående udtryk

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} x = 1$

2) $x \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$

4 Diedergrupper

Vi kigger på en regulær n-gon. Vi kan rotere og spejle vores n-gon. Vi lader r være en rotation mod uret, og s være en spejling. Vi kan skrive en ting vi kan gøre ved vores n-gon som en streng af r og s (hvor vi skriver r^n for $\underbrace{r\cdots r}_{n \text{ gange}}$). Vi skriver 1 for det ikke at gøre noget. Vi læser fra højre til venstre, dvs sr skal læses som at vi først roterer, derefter spejler.

Definition 4.1. For en regulær n-gon definerer vi $D_{2n} = \{1,r,\dots,r^{n-1},s,sr,\dots,s^rn-1\}$. Lad σ og τ være strenge af symboler der definerer handlinger. Vi definerer også operationen $\star$ som sammensætningen af to handlinger givet ved $\sigma \star \tau = \sigma\tau$, hvor følgende gælder

- $r^n = 1$
- $1 \star \sigma = \sigma = \sigma \star 1$ for alle $\sigma \in D_{2n}$
- $sr = r^{n-1}s$
- $ss = 1$

Bemærkning 4.2. Vi undlader ofte at skrive $\star$.

Eksempel 4.3. Vi kigger på D_8. Det svarer til et kvadrat. Vi kan regne

$$r^3sr^3s = r^3ssr = r^3r = r^4 = 1$$

4.1 Opgaver

Opgave 4.1:
Betragt D_6.

1)Hvilken figur svarer det til?
Udregn det nedenstående

2)$srsr$

3)sr^3s

4)ssr

5)r^4sr

5 Hvad er en gruppe?

Vi har set nogle eksempler på grupper, men vi har endnu ikke set definitionen af hvad en gruppe egentlig er. Det vil vi se på nu.

Definition 5.1 (Kartesisk produkt)**.** Lad A og B være mængder. Da er det kartesiske produkt defineret ved $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Definition 5.2. (Kompositionsregel) Lad M være en mængde. Da er funktionen $\star : M \times M \to M$ en kompositionsregel på M. Man skriver $(M,\star)$. Man skriver ofte $\star(x,y)$ som $x \star y$

Lad os tage et eksempel

Eksempel 5.3. Hvis vi tager de naturlige tal $\mathbb{N}$, så danner $+$ en kompositionsregel. Det betyder at vi har $(\mathbb{N},+)$. Vi skriver $n+m$ i stedet for $+(n,m)$.

Vi kan nu definere en gruppe.

Definition 5.4 (Gruppe)**.** Lad G være en mængde og $\star$ en kompositionsregel. Da er $(G,\star)$ en gruppe hvis

1. Der findes et element $e \in G$ så $g \star e = g = e \star g$ (identitet/ neutralelement)
2. For alle $g \in G$ findes et element $g^{-1} \in G$ så $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$ (inverser)
3. for alle $a,b,c \in G$ gælder $(a \star b) * c = a \star (b \star c)$ (associativitet)

Hvis kompositionsregelen er underforstået kan vi nøjes med at skrive G i stedet for $(G,\star)$

Eksempel 5.5. Lad Ω være en mængde. Vi vil vise at den symmetriske gruppe over Ω er en gruppe.

1. Funktionen $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$ givet ved $\mathrm{id}(x) = x$ er et neutralelement.
2. Alle bijektive funktioner er invertible, så for et element σ er σ^{-1} den inverse til σ.
3. Funktionsammensætning er associativ.

Sætning 5.6. *Lad G være en gruppe, der er da præcis et neutralelement.*

Bevis. Overlades til læseren ■

Sætning 5.7. *Lad G være en gruppe og $g \in G$. Da er den inverse g^{-1} entydigt bestemt (der findes kun et)*

Bevis. Antag søgende en modstrid at der findes et element $g \in G$ hvor der er to forskellige inverse g_1^{-1} og g_2^{-1}. Vi har per definition at $g \star g_1^{-1} = e = g \star g_2^{-1}$ Vi kan $\star$ med g_1^{-1} på begge sider, så vi får

$$g^{-1} \star g \star g_1^{-1} = g_1^{-1} \star g \star g_2^{-1}$$
$$e \star g_1^{-1} = g_1^{-1} = e \star g_2^{-1} = g_2^{-1}$$

Så de er ikke forskellige. Det betyder at der maksimalt findes en invers til g. At der findes en invers er givet ved definition. Det betyder at g^{-1} findes og er entydigt bestemt. ■

Definition 5.8 (Abelsk)**.** En gruppe $(G,\star)$ kaldes abelsk hvis $a \star b = b \star a$ for alle $a,b \in G$

Eksempel 5.9. Gruppen $(\mathbb{Z},+)$, hvor $+$ er defineret som det plejer, er abelsk.

5.1 Opgaver

Opgave 5.1: Den trivielle gruppe
Lad $G = \{0\}$ og $\star$ være givet ved $0 \star 0 = 0$.

1)Vis at $(G,\star)$ er en gruppe

2)Er den abelsk?

Opgave 5.2: Udregninger i $(\mathbb{Z},+)$
I det følgende ser vi på gruppen $\mathbb{Z}$.

1)Udregn $1 + 1$

2)Udregn $2 + 3$

3)Find det inverse element til 2

Opgave 5.3: Cykliske grupper
Lad $n \in \mathbb{N}$.

1)Vis at $(C_n,\oplus)$ er en gruppe

2)Er den abelsk?

Opgave 5.4:
Lad Ω være en mængde. Er $(S_\Omega,\circ)$ abelsk?

Opgave 5.5: Diedergrupper
Lad $n \in \mathbb{N}$

1)Vis at $(D_{2n},\star)$ er en gruppe

2)Er den abelsk?

Opgave 5.6:
Lad $(G,\star)$ være en gruppe. Vis at den har præcis et neutralelement.

6 Litteraturliste

[1] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra.* third edition.