

Matematikkens fundament

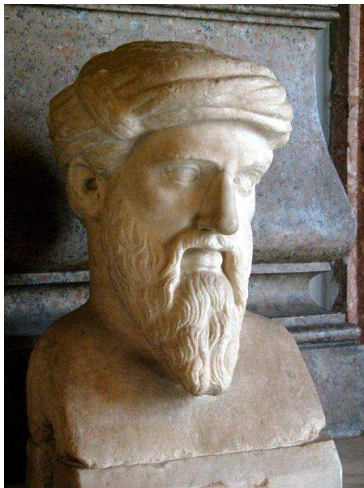
Forelæsning i Odense

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

April 2026

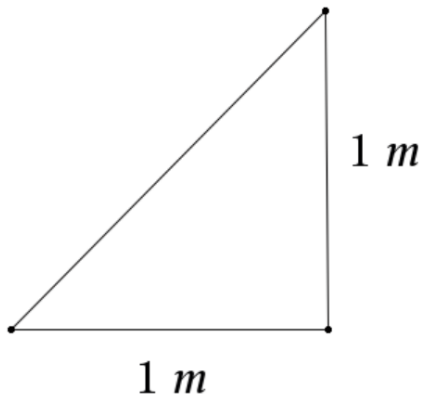
- 1 Hvor kommer matematik fra?
- 2 Hvad er matematik?
- 3 Introduktion til udsagnslogik
- 4 Matematikkens fald

Pythagoras

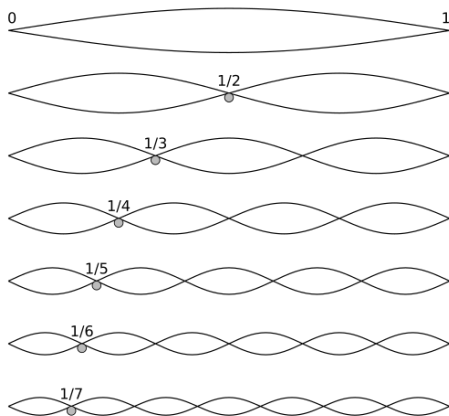


Figur: Pythagoras 570 f.Kr - 495 f.Kr

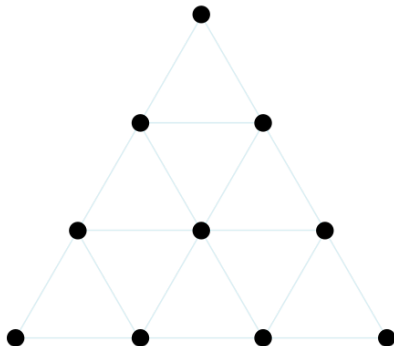
Geometri - Det første paradoks



Figur: Retvinklet trekant med katetelængder 1



Figur: Brøker på en streng



Figur: Tetractys

Så hvad er matematik?

Så hvad er matematik?

- Tal

Så hvad er matematik?

- Tal
- Geometri

Så hvad er matematik?

- Tal
- Geometri
- Musik

Så hvad er matematik?

- Tal
- Geometri
- Musik
- Astronomi

- 1 Hvor kommer matematik fra?
- 2 **Hvad er matematik?**
- 3 Introduktion til udsagnslogik
- 4 Matematikkens fald

- Platon



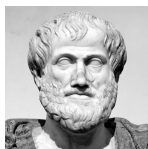
Figur: Ca. 425 f.Kr til ca 348 f.Kr

- Platon



Figur: Ca. 425 f.Kr til ca 348 f.Kr

- Aristoteles



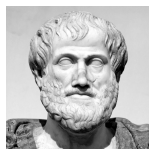
Figur: 384 f.Kr. til 322 f.Kr

- Platon - Realist



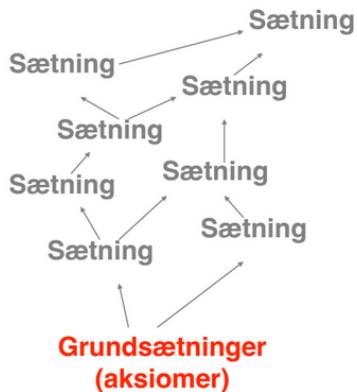
Figur: Ca. 425 f.Kr til ca 348 f.Kr

- Aristoteles - Antirealist



Figur: 384 f.Kr. til 322 f.Kr

Den aksiomatiske deduktive metode



Figur: Den aksiomatiske deduktive metode

Konstruktion af tal

Vi vil gerne konstruere de naturlige tal $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Konstruktion af tal

Vi vil gerne konstruere de naturlige tal $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- 1 Vi definere tallet 0,

Konstruktion af tal

Vi vil gerne konstruere de naturlige tal $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- 1 Vi definere tallet 0,
- 2 Vi definere en successor S .

Konstruktion af tal

Vi vil gerne konstruere de naturlige tal $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- 1 Vi definere tallet 0,
- 2 Vi definere en successor S .

Vi har nu eksempler på tal

$$0 = 0$$

$$S0 = 1$$

$$SS0 = 2$$

$$SSS0 = 3$$

\vdots

① For addition.

① $x + 0 = x$

② $x + Sy = Sx + y$

② For multiplikation.

① $x \cdot 0 = 0$

② $x \cdot Sy = x \cdot y + x$

Eksempel Addition

Hvad er $2 + 3$?

Eksempel Addition

Hvad er $2 + 3$?

Vi skriver om til format med S .

$$SS0 + SSS0$$

Eksempel Addition

Hvad er $2 + 3$?

Vi skriver om til format med S .

$$SS0 + SSS0$$

Vi har nu

$$SS0 + SSS0 = SSS0 + SS0 \quad (\text{aksiom 1.2})$$

Eksempel Addition

Hvad er $2 + 3$?

Vi skriver om til format med S .

$$SS0 + SSS0$$

Vi har nu

$$SS0 + SSS0 = SSS0 + SS0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

$$SSSS0 + S0 = SSSS0 + S0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

Eksempel Addition

Hvad er $2 + 3$?

Vi skriver om til format med S .

$$SS0 + SSS0$$

Vi har nu

$$SS0 + SSS0 = SSS0 + SS0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

$$SSS0 + SS0 = SSSS0 + S0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

$$SSSS0 + S0 = SSSSS0 + 0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

Eksempel Addition

Hvad er $2 + 3$?

Vi skriver om til format med S .

$$SS0 + SSS0$$

Vi har nu

$$SS0 + SSS0 = SSS0 + SS0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

$$SSSS0 + SS0 = SSSSS0 + S0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

$$SSSSS0 + S0 = SSSSSS0 + 0 \quad (\text{aksiom } 1.2)$$

$$SSSSSS0 + 0 = SSSSSS0 \quad (\text{aksiom } 1.1)$$

Hvad er $2 + 3$?

$$2 + 3 = 3 + 2 \quad (\textit{aksiom} \quad 1.2)$$

$$3 + 2 = 4 + 1 \quad (\textit{aksiom} \quad 1.2)$$

$$4 + 1 = 5 + 0 \quad (\textit{aksiom} \quad 1.2)$$

$$5 + 0 = 5 \quad (\textit{aksiom} \quad 1.1)$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Vi skriver om til format med S .

$$SSS0 \cdot SS0$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Vi skriver om til format med S .

$$SSS0 \cdot SS0$$

Vi har nu

$$SSS0 \cdot SS0 = SSS0 \cdot S0 + SSS0 \quad (\text{aksiom 2.2})$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Vi skriver om til format med S .

$$SSS0 \cdot SS0$$

Vi har nu

$$SSS0 \cdot SS0 = SSS0 \cdot S0 + SSS0 \quad (\text{aksiom 2.2})$$

$$SSS0 \cdot S0 + SSS0 = SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom 2.2})$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Vi skriver om til format med S .

$$SSS0 \cdot SS0$$

Vi har nu

$$SSS0 \cdot SS0 = SSS0 \cdot S0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.2)$$

$$SSS0 \cdot S0 + SSS0 = SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.2)$$

$$SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 = 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.1)$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Vi skriver om til format med S .

$$SSS0 \cdot SS0$$

Vi har nu

$$SSS0 \cdot SS0 = SSS0 \cdot S0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.2)$$

$$SSS0 \cdot S0 + SSS0 = SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.2)$$

$$SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 = 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.1)$$

$$0 + SSS0 + SSS0 = SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 1.1 \text{ \& } 1.2)$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

Vi skriver om til format med S .

$$SSS0 \cdot SS0$$

Vi har nu

$$SSS0 \cdot SS0 = SSS0 \cdot S0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.2)$$

$$SSS0 \cdot S0 + SSS0 = SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.2)$$

$$SSS0 \cdot 0 + SSS0 + SSS0 = 0 + SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 2.1)$$

$$0 + SSS0 + SSS0 = SSS0 + SSS0 \quad (\text{aksiom } 1.1 \text{ \& } 1.2)$$

$$SSS0 + SSS0 = SSSSSS0 \quad (\text{aksiom } 1.1 \text{ \& } 1.2)$$

Eksempel Multiplikation

Hvad er $3 \cdot 2$?

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1 + 3 \quad (\text{aksiom 2.2})$$

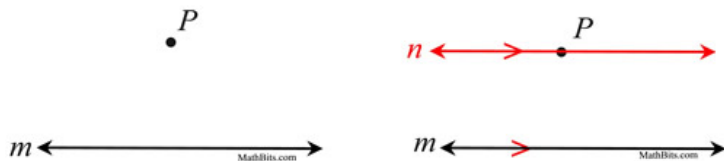
$$3 \cdot 1 + 3 = 3 \cdot 0 + 3 + 3 \quad (\text{aksiom 2.2})$$

$$3 \cdot 0 + 3 + 3 = 0 + 3 + 3 \quad (\text{aksiom 2.1})$$

$$0 + 3 + 3 = 3 + 3 \quad (\text{aksiom 1.1 \& 1.2})$$

$$3 + 3 = 6 \quad (\text{aksiom 1.1 \& 1.2})$$

Parallel Postulatet



Figur: Parallel Postulatet

- Vi har løst universet!

- Vi har løst universet!
- Infinitesimalregning

- Vi har løst universet!
- Infinitesimalregning
- Ikke Euklidisk geometri

- Vi har løst universet!
- Infinitesimalregning
- Ikke Euklidisk geometri
- Mængdelærer

- Vi har løst universet!
- Infinitesimalregning
- Ikke Euklidisk geometri
- Mængdelærer
- Eksistensbeviser

- 1 Hvor kommer matematik fra?
- 2 Hvad er matematik?
- 3 Introduktion til udsagnslogik**
- 4 Matematikkens fald

Definition (Logisk variabel)

En *logisk variabel* er et bogstav (typisk bruger vi p , q og r), som er en slags repræsentant for et udsagn.

Definition (Konnektivsymboler)

Konnektivsymbolerne definerer vi på følgende måde:

Definition (Konnektivsymboler)

Konnektivsymbolerne definerer vi på følgende måde:

- *Negation*: $(\neg p)$ (udtales "non p ").

Definition (Konnektivsymboler)

Konnektivsymbolerne definerer vi på følgende måde:

- *Negation*: $(\neg p)$ (udtales "non p ").
- *Konjunktions* (og): $(p \wedge q)$ (udtales " p og q ").

Definition (Konnektivsymboler)

Konnektivsymbolerne definerer vi på følgende måde:

- *Negation*: ($\neg p$) (udtales "non p ").
- *Konjunktions* (og): ($p \wedge q$) (udtales " p og q ").
- *Disjunktions* (eller): ($p \vee q$) (udtales " p eller q ").

Definition (Konnektivsymboler)

Konnektivsymbolerne definerer vi på følgende måde:

- *Negation*: ($\neg p$) (udtales "non p ").
- *Konjunktions* (og): ($p \wedge q$) (udtales " p og q ").
- *Disjunktions* (eller): ($p \vee q$) (udtales " p eller q ").
- *Implikation*: ($p \rightarrow q$) (udtales " p medfører q ").

Definition (Konnektivsymboler)

Konnektivsymbolerne definerer vi på følgende måde:

- *Negation*: ($\neg p$) (udtales "non p ").
- *Konjunktions* (og): ($p \wedge q$) (udtales " p og q ").
- *Disjunktions* (eller): ($p \vee q$) (udtales " p eller q ").
- *Implikation*: ($p \rightarrow q$) (udtales " p medfører q ").
- *Biimplikation*: ($p \leftrightarrow q$) (udtales " p er ensbetydende med q ").

Negation ($\neg p$)

p : Bjørk sparker	$(\neg p)$: Bjørk sparker ikke
S	
F	

Negation ($\neg p$)

p : Bjørk sparker	$(\neg p)$: Bjørk sparker ikke
S	F
F	

Negation ($\neg p$)

p : Bjørk sparker	$(\neg p)$: Bjørk sparker ikke
S	F
F	S

Konjunktion ($p \wedge q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \wedge q)$: Bjørk sparker og katten bevæger sig
S	S	
S	F	
F	S	
F	F	

Konjunktion ($p \wedge q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \wedge q)$: Bjørk sparker og katten bevæger sig
S	S	S
S	F	
F	S	
F	F	

Konjunktion ($p \wedge q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \wedge q)$: Bjørk sparker og katten bevæger sig
S	S	S
S	F	F
F	S	
F	F	

Konjunktion ($p \wedge q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \wedge q)$: Bjørk sparker og katten bevæger sig
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

Konjunktion ($p \wedge q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \wedge q)$: Bjørk sparker og katten bevæger sig
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

Disjunktion ($p \vee q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \vee q)$: Bjørk sparker eller katten bevæger sig
S	S	
S	F	
F	S	
F	F	

Disjunktion ($p \vee q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \vee q)$: Bjørk sparker eller katten bevæger sig
S	S	S
S	F	
F	S	
F	F	

Disjunktion ($p \vee q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \vee q)$: Bjørk sparker eller katten bevæger sig
S	S	S
S	F	S
F	S	
F	F	

Disjunktion ($p \vee q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \vee q)$: Bjørk sparker eller katten bevæger sig
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Disjunktion ($p \vee q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \vee q)$: Bjørk sparker eller katten bevæger sig
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Implikation ($p \rightarrow q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \rightarrow q)$: Hvis Bjørk sparker, så bevæger katten sig
S	S	
S	F	
F	S	
F	F	

Implikation ($p \rightarrow q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \rightarrow q)$: Hvis Bjørk sparker, så bevæger katten sig
S	S	S
S	F	
F	S	
F	F	

Implikation ($p \rightarrow q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \rightarrow q)$: Hvis Bjørk sparker, så bevæger katten sig
S	S	S
S	F	F
F	S	
F	F	

Implikation ($p \rightarrow q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \rightarrow q)$: Hvis Bjørk sparker, så bevæger katten sig
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Implikation ($p \rightarrow q$)

p : Bjørk sparker	q : Katten bevæger sig	$(p \rightarrow q)$: Hvis Bjørk sparker, så bevæger katten sig
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q))$$

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q))$$

Definition (Tautologi)

En tautologi er et udsagn, som altid er sandt.

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q))$$

Definition (Tautologi)

En tautologi er et udsagn, som altid er sandt.

Jeg har spist æblet eller jeg har ikke spist æblet

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q))$$

Definition (Tautologi)

En tautologi er et udsagn, som altid er sandt.

Jeg har spist æblet eller jeg har ikke spist æblet

$$p \vee \neg p$$

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q))$$

Definition (Tautologi)

En tautologi er et udsagn, som altid er sandt.

Jeg har spist æblet eller jeg har ikke spist æblet

$$p \vee \neg p$$

Hvis der findes drager så findes der drager

Eksempler

Hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Hvis og kun hvis du gør rent og har lavet lektier, så må du tage i byen.

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \wedge q))$$

Definition (Tautologi)

En tautologi er et udsagn, som altid er sandt.

Jeg har spist æblet eller jeg har ikke spist æblet

$$p \vee \neg p$$

Hvis der findes drager så findes der drager

$$p \rightarrow p$$

- 1 Hvor kommer matematik fra?
- 2 Hvad er matematik?
- 3 Introduktion til udsagnslogik
- 4 Matematikkens fald**

- 1 I Skægby har alle skæg.

Barber paradokset

- 1 I Skægby har alle skæg.
- 2 I Skægby skal alle barbere sig dagligt.

Barber paradokset

- 1 I Skægby har alle skæg.
- 2 I Skægby skal alle barbere sig dagligt.
- 3 I Skægby er der en barber, som barberer alle dem, der ikke barberer sig selv.

Barber paradokset

- 1 I Skægby har alle skæg.
- 2 I Skægby skal alle barbere sig dagligt.
- 3 I Skægby er der en barber, som barberer alle dem, der ikke barberer sig selv.

Hvem barberer barberen?

Barber paradokset

- 1 I Skægby har alle skæg.
- 2 I Skægby skal alle barbere sig dagligt.
- 3 I Skægby er der en barber, som barberer alle dem, der ikke barberer sig selv.

Hvem barberer barberen?

Hvis barberen ikke barberer sig selv, så bliver han barberet af barberen.

Barber paradokset

- 1 I Skægby har alle skæg.
- 2 I Skægby skal alle barbere sig dagligt.
- 3 I Skægby er der en barber, som barberer alle dem, der ikke barberer sig selv.

Hvem barberer barberen?

Hvis barberen ikke barberer sig selv, så bliver han barberet af barberen.

Hvis barberen barberer sig selv, så bliver han barberet af barberen og må dermed ikke barberer sig selv.

Barber paradokset

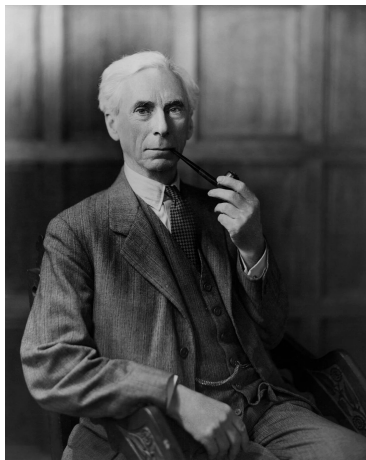
- 1 I Skægby har alle skæg.
- 2 I Skægby skal alle barbere sig dagligt.
- 3 I Skægby er der en barber, som barberer alle dem, der ikke barberer sig selv.

Hvem barberer barberen?

Hvis barberen ikke barberer sig selv, så bliver han barberet af barberen.

Hvis barberen barberer sig selv, så bliver han barberet af barberen og må dermed ikke barberer sig selv.

PARADOKS!



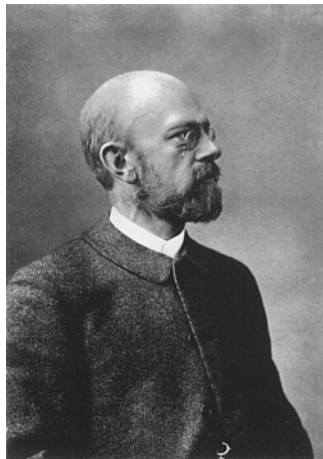
Figur: Bertrand Russell 1872 til 1970

Vi skal definere alt matematik ud fra tautologier!



Figur: Luitzen Egbertus Jan Brouwer 1881 til 1966

Matematik skal beskrive virkeligheden!



Figur: David Hilbert 1862 til 1943

Matematik er bare noget vi leger!



Figur: Kurt Gödel 1906 til 1978

- Komplethed. Er alt matematik enten sandt eller falsk?



Figur: Kurt Gödel 1906 til 1978

- Kompletthed. Er alt matematik enten sandt eller falsk? Nej.
- Konsistens. Findes der paradokser?



Figur: Kurt Gödel 1906 til 1978

- Kompletthed. Er alt matematik enten sandt eller falsk? Nej.
- Konsistens. Findes der paradokser? Det ved vi ikke.

Definition

Et naturligt tal forskelligt fra 1 er et primtal hvis det kun kan deles med 1 og sig selv.

Definition

Et naturligt tal forskelligt fra 1 er et primtal hvis det kun kan deles med 1 og sig selv.

Sætning

Alle naturlige tal kan skrives som et unikt produkt af primtal.

Vi vil lave *odense* om til et tal

Vi vil lave *odense* om til et tal $o=15, d=4, e=5, n=14, s=19, e=5$.

Vi vil lave *odense* om til et tal $o=15$, $d=4$, $e=5$, $n=14$, $s=19$, $e=5$.

$$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^{14} \cdot 11^{19} \cdot 13^5 = \text{MEGET STORT TAL}$$

Vi vil lave *odense* om til et tal $o=15$, $d=4$, $e=5$, $n=14$, $s=19$, $e=5$.

$$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^{14} \cdot 11^{19} \cdot 13^5 = \text{MEGET STORT TAL}$$

Lad os nu lave tallet 12 om til bogstaver.

Vi vil lave *odense* om til et tal $o=15$, $d=4$, $e=5$, $n=14$, $s=19$, $e=5$.

$$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^{14} \cdot 11^{19} \cdot 13^5 = \text{MEGET STORT TAL}$$

Lad os nu lave tallet 12 om til bogstaver.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1$$

Vi vil lave *odense* om til et tal $o=15$, $d=4$, $e=5$, $n=14$, $s=19$, $e=5$.

$$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^{14} \cdot 11^{19} \cdot 13^5 = \text{MEGET STORT TAL}$$

Lad os nu lave tallet 12 om til bogstaver.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1$$

$2 = b$, $1 = a$ så $12 = ba$.

