

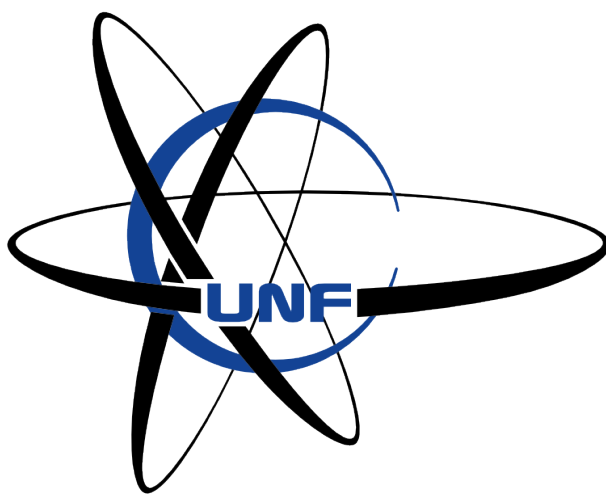
Workshop i lineær algebra

Jonas Nipgaard Dissing (jond@unf.dk)

På forarbejde af Rasmus Frigaard Lemvig (rle@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 5 marts 2026



Velkommen til denne workshop om lineær algebra! Lineær algebra er en særdeles vigtig og brugbar gren af matematikken. Lineær algebra finder anvendelser i datalogi, statistik og dataanalyse, fysik, kemi, løsning af differentialligninger og meget andet. Det meste af tiden skal I arbejde selvstændigt med koncepterne, men vi vil veksle mellem tavlegennemgang og opgaveregning.

1 Vektorer, matricer og regneoperationer

Definition 1.1. En n -dimensional (reel) *vektor* er en ordnet liste

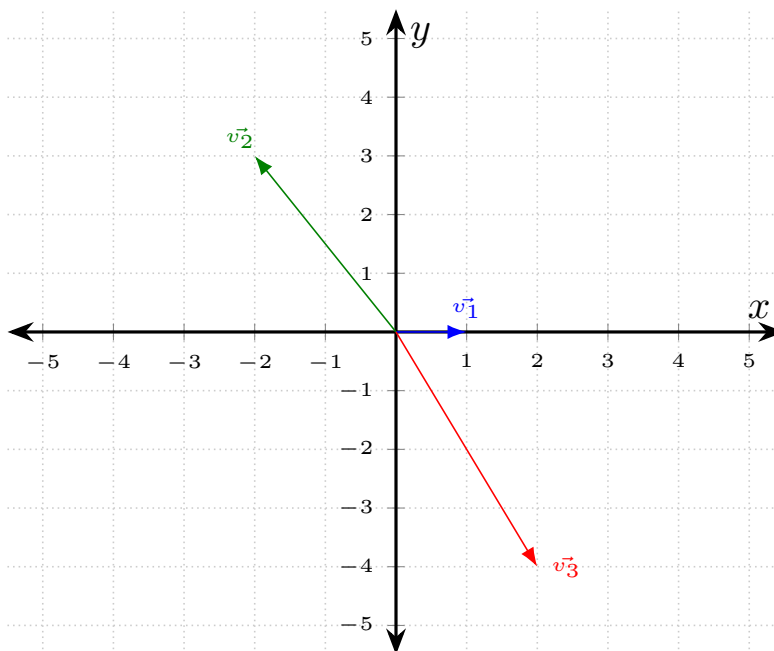
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hvor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ kaldes vektorens *indgange*. Mængden af n -dimensionelle vektorer betegnes $\mathbb{R}^n$.

Eksempler på vektorer i $\mathbb{R}^2$ er

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Disse vektorer kan nemt illustreres. Den øverste koordinat indikerer, hvor langt ud af første-aksen, man skal gå, mens andenkoordinaten indikerer, hvor langt ud af andenaksen, man skal gå. De tre vektorer ser sådan ud i et koordinatsystem:



Princippet med vektorer i $\mathbb{R}^3$ er det samme. I er velkomne til at tænke på en vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^3$ som et punkt med koordinaterne (x, y, z) . Selvom en vektor er defineret som en søjle, vil vi ofte bedrive misbrug af notation og skrive $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ for en vektor. Vi indfører nu to fundamentale regneoperatorer for vektorer, nemlig addition og skalarmultiplikation. Disse er defineret som følger.

Definition 1.2. Lad $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ og $a \in \mathbb{R}$. Summen af $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er defineret som

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

og skalarmultiplikationen af a på $\vec{v}_1$ er defineret som

$$a \cdot \vec{v}_1 = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}$$

hvor $\cdot$ inde i vektoren er almindelig multiplikation af reelle tal.

Bemærkning 1.3. Definitionen ovenover forudsætter, at de to vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ har samme dimension. Vi har ingen definition af addition for vektorer med forskelligt antal indgange. F.eks. giver det ikke mening at lægge vektorerne

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sammen.

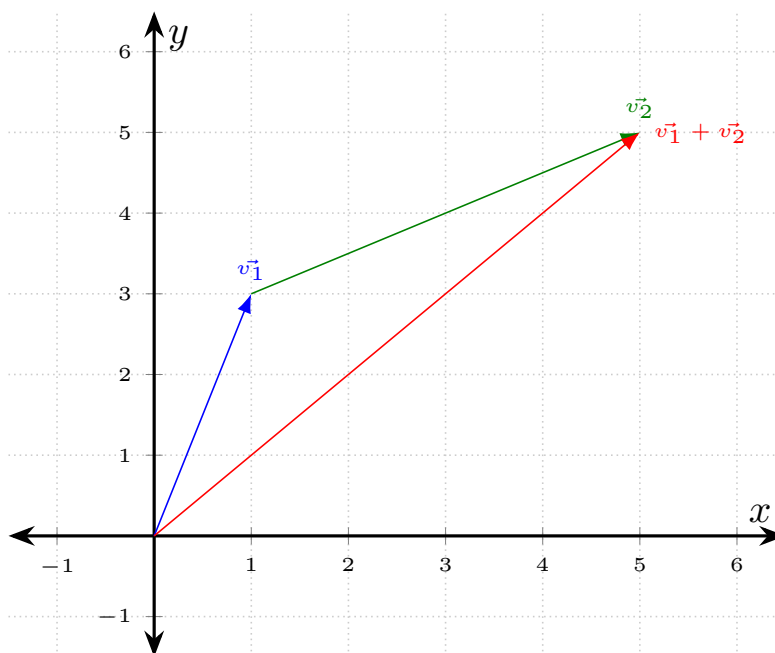
Både addition af vektorer og skalarmultiplikation har en geometrisk fortolkning. Summen af to vektorer giver vektoren, som fås ved at lægge de to vektorer i forlængelse af hinanden. Lad os se på vektorerne

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Deres sum er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

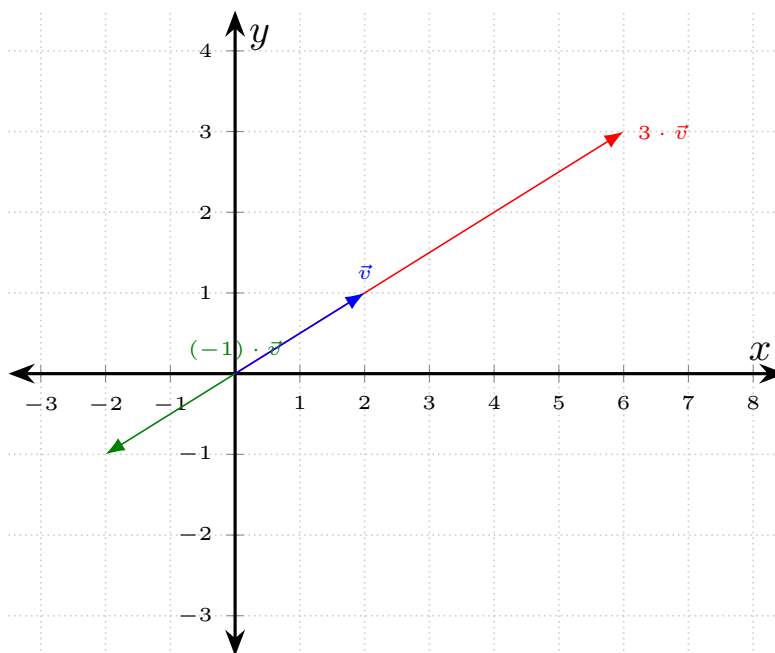
og i et koordinatsystem ser det hele således ud:



Skalarmultiplikation skal fortolkes som en skalering. Betragt vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skalerer vi vektoren med hhv. -1 og 3 fås



Skalarmultiplikation med -1 er et vigtig specialtilfælde, da det svarer til at spejle vektoren. Den skalerede vektor har samme længde, men peger i den modsatte retning. Inden vi bevæger os videre til matricer, vil vi nævne, at $\mathbb{R}^n$ er et eksempel på en

mængde med struktur kaldet et *vektorrum*. Den mere teoretiske side af lineær algebra beskæftiger sig med generelle (abstrakte) vektorrum samt særlige afbildninger mellem disse kaldet *lineære* afbildninger. Vi er nu klar til at se på matricer.

Definition 1.4. En $m \times n$ -matrix A er et skema af reelle tal i m rækker og n søjler

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

hvor $a_{ij} \in \mathbb{R}$ betegner det reelle tal i række i og søjle j . Disse kaldes matrixens *indgange*. Mængden af $m \times n$ -matricer betegnes $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Vi bruger som regel store bogstaver $A, B, C, \dots$ til at betegne matricer og de tilhørende små bogstaver til at betegne deres indgange. Et eksempel på matricer i $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

mens matricer i $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ kunne være

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

I mange henseender er $n \times n$ -matricer (altså matricer med samme antal rækker og søjler) særligt interessante. De kaldes *kvadratiske* matricer. Det skal vi se senere, når vi arbejder med inverse matricer. Matricen C ovenover er i øvrigt ikke helt tilfældig, men spiller derimod en meget central rolle. Faktisk er den så vigtig, at den har en særlig betegnelse. I definitionen nedenunder definerer vi en række centrale matricer og vektorer.

Definition 1.5. $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ defineres til at være vektoren, hvori alle indgange er 0:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denne vektor betegnes *nulvektoren*. $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ defineres tilsvarende til at være den kvadratiske matrix med n rækker og søjler, hvori alle indgange er 0:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ defineres til at være den kvadratiske matrix, hvor diagonalen består af 1-taller, og alle andre indgange er 0:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

I_n kaldes *identitetsmatricen* af dimension n .

Bemærkning 1.6. Bemærk, at nulvektoren opfylder $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ for alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Dermed spiller nulvektoren samme rolle som 0 gør i de reelle tal.

Matricer er brugbare, fordi de indeholder information på en form, vi kan regne med. Vi skal dog først have defineret, hvordan vi kan regne med matricer. Tilfældet med addition minder meget om addition af vektorer, men når vi indfører multiplikation af matricer, bliver det straks mere regnetungt. Lad os dog starte med at få addition og skalarmultiplikation af matricer på plads.

Definition 1.7. Lad $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Skriv

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

da er summen $A + B$ defineret til

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Altså skal man blot lægge indgangene sammen. Hvis $a \in \mathbb{R}$ er skalarmultiplikationen aA defineret som

$$aA = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} & \cdots & a \cdot a_{1n} \\ a \cdot a_{21} & a \cdot a_{22} & \cdots & a \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a \cdot a_{m1} & a \cdot a_{m2} & \cdots & a \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

altså skal man blot gange a på alle indgangene i A .

Bemærkning 1.8. Addition af to matricer er kun defineret, hvis de har samme dimensioner, dvs. samme antal rækker og samme antal søjler. Det giver altså kun mening at lægge matricerne A og B sammen, hvis de begge ligger i $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Som eksempel kunne vi tage matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

fra tidligere. Vi har

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 11 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 15 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi har følgende resultater for matrix-addition. I skal ikke tænke for meget over begreberne i parentes. Vi kommer ikke til at bruge dem i forløbet, men det er passende, at I har set dem.

Sætning 1.9. For matricer $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gælder

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativitet).
2. $A + O = A = O + A$ (O er neutralelement for addition).
3. $A + (-A) = O = (-A) + A$ (eksistens af additiv invers). Her betegner $-A$ matricen med de samme indgange i A , blot med omvendt fortegn.

4. $A + B = B + A$ (kommutativitet).

Proof. Alle egenskaberne følger direkte af definitionen af matrix-addition samt de tilsvarende egenskaber for de reelle tal. ■

Inden vi definerer multiplikation af to matricer, definerer vi et specielt tilfælde, nemlig multiplikation af en matrix og en vektor.

Definition 1.10. Lad $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ og $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ med indgange a_{ij} og x_j , hvor $i = 1, \dots, m$ og $j = 1, \dots, n$. Da definerer vi produktet af A og $\vec{v}$ til

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Bemærkning 1.11. Matrix-vektorproduktet Av er kun defineret, hvis A har samme antal søjler som indgange i v . Resultatet af at gange en $m \times n$ -matrix på en n -dimensional vektor er en m -dimensional vektor.

Lad os tage nogle eksempler. Vi farvelægger indgangene i vektoren, så man kan se, hvad der foregår i multiplikationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lad os tage et eksempel med en større matrix og vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 10 & 0 & -1 & 4 \\ 8 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & -9 & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ 10 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \\ 8 \cdot 2 + 7 \cdot 0 - 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 - 9 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 11 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 32 \\ 39 \\ 11 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Der findes en god måde at huske, hvordan man tager matrix-vektorprodukter på, såfremt man kender til prikproduktet/skalarproduktet af to vektorer. Definitionen er herunder.

Definition 1.12. Lad $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er *prikproduktet/skalarproduktet* af v_1 og v_2 defineret til

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \in \mathbb{R}.$$

Vi bemærker, at prikproduktet af to vektorer kun er defineret, hvis de to vektorer har samme antal indgange, og at prikproduktet giver et reelt tal og ikke en vektor. Nu kan vi forklare sammenhængen mellem prikproduktet og matrix-vektormultiplikation.

Antag, at vi har en $m \times n$ -matrix A og en vektor v i $\mathbb{R}^n$. Lad $A_1, A_2, \dots, A_m$ betegne rækkerne i A . Da er $A_1, A_2, \dots, A_m$ vektorer i $\mathbb{R}^n$, og vi har

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot \vec{v} \\ A_2 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ A_m \cdot \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Lad os nu definere matrix-matrixmultiplikation.

Definition 1.13. Lad $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ og $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Lad $B_1, B_2, \dots, B_p$ betegne søjlerne i B . Da definerer vi produktet AB til at være $m \times p$ -matricen givet ved

$$AB = (AB_1 \quad AB_2 \quad \cdots \quad AB_p).$$

I ord: AB er matricen, hvis søjler er produktet af A med søjlerne i B .

Bemærkning 1.14. Bemærk, at matrixproduktet AB er defineret hvis og kun hvis A har samme antal søjler som B har rækker.

Lad os tage en række eksempler. Betragt de to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da A har tre søjler, og B har tre rækker, er AB veldefineret. Vi beregner

$$\begin{aligned} AB &= \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 22 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kan også beregne produktet BA fordi antal søjler i B er lig antal rækker i A . Da fås

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

I dette eksempel kunne man tage matrixproduktet fra begge sider, men dette er ikke altid muligt. Vi kan f.eks. se på matricen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da eksisterer matrixproduktet CA , men AC giver ikke mening. Et simpelt og vigtigt eksempel på matrix-produkter er mellem kvadratiske matricer. Her kan man altid tage produktet fra begge sider, men det er ikke nødvendigvis det samme resultat, man får. Definér

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da udregner vi

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{men} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

så $AB \neq BA$. Dette står i kontrast til, hvad vi kender fra tallene normalt. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ gælder $ab = ba$. Lad os til slut opskrive nogle grundlæggende resultater for matrixprodukter.

Sætning 1.15. *For matricer A, B og C af passende dimensioner, så produkterne giver mening, har vi følgende:*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativitet).
2. $AI_n = A = I_n A$ (I_n er neutralelement for multiplikation).
3. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiv lov).

Proof. Beviserne for punkt 1. og 3. udelades, da de er lange og involverer adskillige mindre behagelige summer. Vi refererer til [2]. Punkt 2. overlades til øvelserne. ■

2 Anvendelser og perspektiver

Til slut skal vi gennemgå nogle brugbare anvendelser af lineær algebra samt lidt flere egenskaber og definitioner relateret til dem. Genkald identitetsmatricen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Denne matrix har den interessante egenskab, at $I_n v = v$ for alle $v \in \mathbb{R}^n$. I_n fungerer på samme måde som *identitetsafbildingen* $f(x) = x$. Vi vil nu relatere matricer til lineære ligningssystemer. Lineær algebra er nyttigt, fordi vi kan bruge det til at løse lineære ligningssystemer effektivt. Et simpelt eksempel er

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ x - 4y &= 0. \end{aligned}$$

I dette tilfælde har vi to ligninger med to ubekendte, men vi kunne lige så vel have betragtet m ligninger med n ubekendte. Bemærk, at vi kan omskrive ligningssystemet således:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemærk også, hvordan det trivielle ligningssystem

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \end{aligned}$$

for $a, b \in \mathbb{R}$ kan omskrives til

$$I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

For at se, hvordan vi kan benytte matrixberegninger til at løse lineære ligningssystemer, skal vi først introducere inverse matricer.

Definition 2.1. En matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bemærk, at A er kvadratisk) er *invertibel*, hvis der findes en matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ som opfylder

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Det viser sig, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

fra før har en invers. Den er givet ved

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Men nu kan vi jo løse vores ligningssystem ved at gange begge sider med A^{-1} :

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså er løsningen lig $x = 4/11$ og $y = 1/11$. Fremgangsmåden, vi har benyttet, er helt generel og kan formuleres som sætning således:

Sætning 2.2. *Givet et ligningssystem*

$$A\vec{v} = \vec{w}$$

med $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ og hvor A har en invers A^{-1} , da er den entydige løsning $\vec{v}$ til systemet givet ved

$$\vec{v} = A^{-1}\vec{w}.$$

Der er et problem med denne fremgangsmåde. Den forudsætter, at vi har en metode til at bestemme inverse matricer, såfremt de findes. Sådanne metoder beror på såkaldt *Gauss-elimination*, som vi ikke har tid til at komme ind på i denne workshop. Dog kan vi komme uden om dette problem ved at holde os til det simple tilfælde med to gange to matricer. Helt konkret har vi følgende sætning.

Sætning 2.3. *Betragt en matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ givet ved*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da gælder, at hvis $ad - bc \neq 0$, så er A invertibel med invers

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bevis. Beviset overlades til jer. Se opgave 3.14. ■

Størrelsen $ad - bc$ er så vigtig, at den har sit eget navn.

Definition 2.4. Lad $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da defineres determinanten af A ved

$$\det A = ad - bc.$$

Determinanten har et væld af interessante og brugbare egenskaber. Vi har allerede set en af dem, nemlig, at hvis $\det A \neq 0$, da er A invertibel. En anden interessant egenskab er såkaldt *multiplikativitet*.

Sætning 2.5. Lad $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Da gælder, at

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Bevis. Lad

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Da har vi

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \\ &= (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - cea f - cebh - dga f - dg b h \\ &= adeh - adgf - bceh + bcgf \end{aligned}$$

mens

$$\det A \det B = (ad - bc)(eh - gf) = adeh - adgf - bceh + bcgf.$$

De to udregninger har samme resultat, ergo fås det ønskede. ■

3 Opgaver

- **Opgave 3.1:**

Lad

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1) Beregn $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ og $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

2) Tegn $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ og $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ind i et koordinatsystem.

- **Opgave 3.2:**

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Beregn $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, B\vec{v}_1$ og $B\vec{v}_2$.

- **Opgave 3.3:**

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beregn $A\vec{v}$.

- **Opgave 3.4: Skaleringsmatricer**

Lad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Sådan en matrix kaldes en *skaleringsmatrix*. Vi ser på tilfældet $n = 2$ og definerer

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lad $\vec{v} = (1, 1)$.

1) Beregn $A\vec{v}$ og $B\vec{v}$.

2) Tegn $\vec{v}, A\vec{v}$ og $B\vec{v}$ i et koordinatsystem. Forklar, hvad matricerne A og B gør.

- **Opgave 3.5: Rotationsmatricer**

Lad $R(\theta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ være givet ved

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Sådan en matrix kaldes en *rotationsmatrix*.

1) Lad $\vec{e}_1 = (1, 0)$ og $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Beregn $R(\theta)\vec{e}_1$ og $R(\theta)\vec{e}_2$. Tegn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, R(\theta)\vec{e}_1$ og $R(\theta)\vec{e}_2$ i et koordinatsystem.

2) Lad nu $\vec{v} = (x_1, x_2)$ være en generel vektor. Forklar, hvad $R(\theta)$ gør ved vektoren $\vec{v}$. Det er en rigtig god idé at lave en illustration.

- **Opgave 3.6:**

Lad $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2,5}$ og $C \in \mathbb{R}^{5,2}$. Hvilke af følgende udtryk er veldefinerede?

- AB
- BA
- BC
- CB
- $BC + A$
- $CB + A$
- $AB + C$
- ABC
- CAB

•• **Opgave 3.7:**

Beregn AB for:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

••• **Opgave 3.8: Prikproduktet**

I denne opgave skal vi undersøge prikproduktet lidt nærmere.

1) Udregn prikprodukterne af følgende vektorer med hinanden (i alt seks prikprodukter):

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi siger, at to vektorer er *ortogonale*, hvis deres prikprodukt er 0.

2) Hvilke af ovenstående vektorer er ortogonale med hinanden?

3) Tegn $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ og $\vec{v}_4$ i et koordinatsystem. Hvad betyder det geometrisk, at vektorer er ortogonale?

4) Lad nu $\vec{v} = (x_1, x_2)$ være en vilkårlig vektor. Da defineres *tværvektoren* $\hat{v}$ som $\hat{v} = (-x_2, x_1)$ (udtales "v hat"). Hvordan ser vektoren $\hat{v}$ ud i forhold til $\vec{v}$? Tegn! Vis, at $\vec{v}$ og $\hat{v}$ er ortogonale.

5) Lad nu $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Hvad er længden af vektoren $\vec{v}$? Vink: Brug Pythagoras. I er velkomne til at nøjes med at vise det for $n = 2$.

6) Hvordan er længden af en vektor og prikproduktet relateret?

•• **Opgave 3.9:**

Beregn AB for:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

••• **Opgave 3.10:**

I denne opgave beviser vi punkt 2. af sætning 1.15. Lad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1) Lad $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Bevis, at $I_n \vec{v} = \vec{v}$.

2) Brug forrige delopgave til at bevise $I_n A = A$.

3) Bevis, at $AI_n = A$.

• **Opgave 3.11:**

Bestem determinanterne af følgende matricer:

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

•• **Opgave 3.12:**

Bestem A^{-1} af følgende matricer:

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

•• **Opgave 3.13:**

Omskriv ligningssystemet

$$4x - 3y = 0$$

$$2x + 6y = 2$$

til formen

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og løs ligningssystemet ved at bruge matrixberegninger.

•• **Opgave 3.14:**

Bevis sætning 2.3.

•• **Opgave 3.15:**

Omskriv ligningssystemet

$$x + y = 3$$

$$5x + 10y = 20$$

til formen

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og løs ligningssystemet ved at bruge matrixberegninger.

••• **Opgave 3.16: Kvadratiske former**

En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes en *kvadratisk form*, hvis f kan skrives på formen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

for en matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1) Argumentér for, at en kvadratisk form faktisk er en funktion med værdier i $\mathbb{R}$.

2) Betragt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Skriv funktionen f ud eksplicit.

3) Betragt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vis, at f er en kvadratisk form.

••• **Opgave 3.17: Nilpotente matricer**

En matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kaldes *nilpotent*, hvis der findes et $k \in \mathbb{N}$, så $A^k = O$. Sagt med ord, så er en tilstrækkelig høj potens af A lig nulmatricen.

1) Find et eksempel på en nilpotent 2×2 -matrix, der ikke er nulmatricen.

2) Find et eksempel på en nilpotent 3×3 -matrix, der ikke er nulmatricen.

3) Vis, at hvis $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ er nilpotent, da er $\det A = 0$. Vink: husk at determinanten er multiplikativ.

4) Antag, at A er nilpotent med $A^k = 0$. Bevis, at $I_n - A$ er invertibel ved at bestemme den inverse matrix. Vink: Se på $I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.

••• **Opgave 3.18: Idempotente matricer**

En matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kaldes *idempotent*, hvis $A^2 = A$.

1) Bevis, at I_n er idempotent.

2) Bevis, at hvis A er idempotent, er $A^k = A$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

3) Vis, at hvis A er idempotent, så er $I - A$ også idempotent.

4) Find et eksempel på en idempotent 2×2 -matrix, som ikke er I_2 eller nulmatricen.

5) Find et eksempel på en idempotent 3×3 -matrix, som ikke er I_3 eller nulmatricen.

6) Hvilke værdier kan $\det A$ antage, hvis $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ er en idempotent matrix?

•• **Opgave 3.19: Triangulære matricer**

Betragt matricer $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ på formen

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

L kaldes *nedre triangulær*, og U kaldes *øvre triangulær*. I opgaven er I mere end velkomne til kun at arbejde med 2×2 - eller 3×3 -matricer, når I skal bevise ting.

1) Vis, at produktet af to nedre triangulære matricer igen er en nedre triangulær matrix.

2) Vis, at produktet af to øvre triangulære matricer igen er en øvre triangulær matrix.

Kilder

- [1] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 3 edition. ISBN 978-3-319-11079-0.
- [2] Nathalie Wahl og Lars Hesselholt. *Lineær Algebra*. 2016.