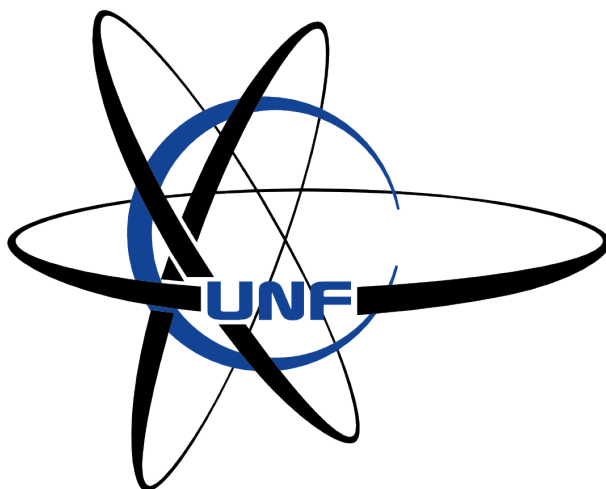


Workshop i sigma-matematik

Jonas Nipgaard Dissing (jond@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 29. januar 2026



Introduktion til workshoppen

Velkommen til workshoppen i sigma-matematik. Vi vil se på 3 forskellige måder bogstavet sigma bruges i matematik: sumnotation, parametrisering af flader og sigma-algebraer.

Workshoppen forudsætter grundlæggende viden om mængdelære. Der er dog en refresher i starten af dette dokument i tilfælde af at man har glemt noget.

1 Mængdelære

Det følgende afsnit vil ikke blive gennemgået, men er tænkt som opslagsværk hvis man vil slå noget op. De begreber indenfor mængdelæren som det ikke forventes at I har set før vil blive introduceret lige før vi skal bruge dem. Dette afsnit er ikke tænkt som en første introduktion til mængdelære, men snare en genopfriskning.

Definition 1.1. En mængde er en samling af elementer. Vi kan skrive mængder på formen $\{elementer\}$ og $\{elementer \mid \text{betingelser}\}$

Definition 1.2. Lad A være en mængde og x et element. Hvis x er et element i A skriver vi $x \in A$.

Definition 1.3. Den tomme mængde (skrevet $\emptyset$) er mængden givet ved $\{\}$

Definition 1.4. Lad A og B være mængder. Da er foreningsmængden givet ved $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$ og fællesmængden ved $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

Definition 1.5. Lad A og B være mængder. Hvis alle elementer i A også er i B siger vi at A er en delmængde af B og vi skriver $A \subseteq B$.

Definition 1.6. En funktion $f : A \rightarrow B$ tilordner hvert element i A (definitionsområdet) til et element i B (værdimængden).

Definition 1.7. En funktion $f : A \rightarrow B$ er bijektiv hvis alle elementer i B rammes af præcis et element fra A .

Definition 1.8. Lad $f : A \rightarrow B$ og $g : B \rightarrow C$ være funktioner. Da er $g \circ f : A \rightarrow C$ givet ved $g \circ f(x) = g(f(x))$

Definition 1.9. Lad $f : A \rightarrow B$ være en funktion. En funktion $g : B \rightarrow A$ er invers til f hvis $f \circ g(y) = y$ og $g \circ f(x) = x$. I det tilfælde kan vi skrive g som f^{-1} .

2 Sumnotation

Det første sigma vi vil introducere er $\sum$ som bruges til at notere summer.

Definition 2.1. Lad a_i være tal for alle $m \leq i \leq n$, hvor m og n er naturlige tal eller 0. Da definerer vi

$$\sum_{i=m}^n = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Eksempel 2.2. Vi kan regne

$$\sum_{i=1}^5 n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

og

$$\sum_{i=1}^3 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

2.1 Induktion

I nogle tilfælde findes der formler til at regne summer med mange led ud. Vi vil her vise nogen af dem ved at bruge en metode indenfor matematikken der hedder induktion.

Proposition 2.3. *Lad n være et naturligt tal. Da gælder*

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bevis. **Induktionsstart:** Lad $n = 1$. Vi regner begge sider af lighedstegnet og får

$$\sum_{i=1}^1 = 1 = 1$$

Så propositionen er sand hvis $n = 1$.

Induktionsantagelse: Antag at propositionen er sand for et $m \in \mathbb{N}$. Altså

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$$

Induktionsskridt: Lad $n = m + 1$. Vi regner

$$\sum_{i=0}^{m+1} i = \sum_{i=0}^m i + m + 1 = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Dette viser per induktion at propositionen er sand. ■

2.2 Opgaver

Opgave 2.1:

Udregn

1)

$$\sum_{i=1}^6 2i$$

2)

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{i}$$

3)

$$\sum_{i=1}^3 2^i$$

Opgave 2.2:

1) Udregn

$$\sum_{i=1}^5 (2^{i+1} - 2^i)$$

2) Gæt på hvad

$$\sum_{i=1}^n (2^{i+1} - 2^i)$$

giver

3) Gæt på hvad

$$\sum_{i=m}^n (2^{i+1} - 2^i)$$

giver

Opgave 2.3:

1) Udregn $2 + 4 + \dots + 16$

2) Udregn

$$\sum_{i=1}^8 2i$$

3) Udregn

$$\sum_{i=1}^4 2^i$$

Opgave 2.4:

Vis de følgende formler ved induktion

1)

$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$$

2)

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3 Flader i rummet

Definition 3.1. Lad $f : A \rightarrow B$ være en funktion. Lad $S \subseteq A$. Vi definerer billedet af S under f som

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

Eksempel 3.2. Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = x^2$. Da er $f([1,2]) = [1,4]$.

Definition 3.3. Lad A og B være mængder. Vi definerer

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Vi definerer $A^2 = A \times A$ og $A^3 = A \times A \times A$.

Definition 3.4. En parametriseret kontinuert flade i $\mathbb{R}^3$ er en kontinuert funktion $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ hvor $U \subseteq \mathbb{R}^2$ er en åben ikke-tom mængde.

Bemærkning 3.5. Her på workshopen vil vi ikke gå ind i hvad det vil sige at en mængde er åben. Alle eksempler og opgaver vil tage udgangspunkt i åbne mængder.

Eksempel 3.6. Vi vil finde en parametrisering af fladen givet af mængden $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1\}$. Vi definerer funktionen $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ved $\sigma(u,v) = (\sin(u), v, \cos(u))$. Vi finder billedet af $\mathbb{R}^2$ under σ

$$\sigma(\mathbb{R}^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1\}$$

som var den flade vi ønskede. Det bør nævnes (og det kommer vi også til) at σ ikke er den eneste parametrisering af fladen.

Definition 3.7. Lad U, W være åbne mængder. En diffeomorfi er en glat¹ bijektiv funktion med en glat invers.

Definition 3.8. Lad $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en parametriseret flade og lad $\varphi : W \rightarrow U$ være en diffeomorfi. Da er $\tau = \sigma \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ en reparametrisering af σ .

Eksempel 3.9. Betragt fladen parametriseret ved $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u,v) = (\sin(u), v, \cos(u))$. Vi vil vise at den også kan parametriseres ved $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\tau(u,v) = (\sin(u), 2v, \cos(u))$. Vi ser at vi har funktionen $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved $\varphi(u,v) = (u, 2v)$. Den opfylder $\tau = \sigma \circ \varphi$.

Definition 3.10. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval. En parametriseret kontinuert kurve er en kontinuert funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 3.11. Lad $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en parametriseret flade, og $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en parametriseret kurve. Vi siger at γ ligger på σ hvis der findes en funktion $\mu : I \rightarrow U$ således at $\gamma = \sigma \circ \mu$.

Eksempel 3.12. Vi vil vise at kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\gamma(t) = (\sin(t), t, \cos(t))$ ligger på fladen $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u,v) = (\sin(u), v, \cos(u))$. Vi ser at vi har funktionen $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved $\mu(t) = (t, t)$. Den opfylder $\gamma = \sigma \circ \mu$ som ønsket.

¹En glat funktion er en særlig pæn kontinuert funktion. Her på workshopen vil alle funktioner være glatte

3.1 Opgaver

Opgave 3.1:

Skitsér og find parametriseringer for de følgende flader

- 1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$
- 2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$
- 3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin(x)\}$

Opgave 3.2:

Beskriv fladerne paramtriseret af de følgende parametriseringer

- 1) $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$ (Hint: brug $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$)
- 2) $\sigma : (0, \pi)^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (\sin(u), \cos(u), v)$
- 3) $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (v \sin(u), v, v \cos(u))$

Opgave 3.3:

Hvilken af de nedenstående parametriseringer paramtriserer ikke den samme flade som de 2 andre?

- 1) $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (u, v, uv)$
- 2) $\sigma : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (\sin(u), v, \sin(u)v)$
- 3) $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (v, u, vu)$

Opgave 3.4:

Lad σ, σ' og τ være parametriseringer af flader. Vis at hvis σ' er en reparametrisering af σ og τ er en reparametrisering af σ' , så τ en reparametrisering af σ .

Opgave 3.5:

Vi betragter fladen paramtriseret ved $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\sigma(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$. Vis at de nedenstående kurver ligger på σ

- 1) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\gamma(t) = (\sin(t), 0, \cos(t))$
- 2) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$
- 3) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $\gamma(t) = (\sin(t) \cos(t), \sin^2(t), \cos(t))$

4 Sigma-algebraer

Vi starter med nogle begreber fra mængdelære som vi ikke er stødt på endnu

Definition 4.1. Lad A og B være mængder. Vi definerer deres differens som $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Lad X være en universalmængde og A en mængde (da X er en universalmængde antager vi $A \subseteq X$), vi definerer komplementet af A i X som $A^c = X \setminus A$.

Eksempel 4.2. Lad $X = \{1,2,3,4\}$ og $A = \{2,3\}$. Da er $A^c = X \setminus A = \{1,4\}$.

Definition 4.3. Lad $A_1, A_2, \dots$ være mængder. Da er

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

og

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

Definition 4.4. Lad X være en mængde. En sigma-algebra $\mathcal{A}$ er en mængde hvor der gælder at

1. $X, \emptyset \in \mathcal{A}$
2. Hvis $A \in \mathcal{A}$ så $A^c \in \mathcal{A}$
3. Hvis vi har mængder $A_1, A_2, \dots$ hvor $A_i \in \mathcal{A}$ for alle $i \in \mathbb{N}$, så $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

En mængde der er indeholdt i en sigma-algebra kaldes målelig

En tuppel $(X, \mathcal{A})$ hvor X er en mængde og $\mathcal{A}$ er en sigma algebra på X , kaldes et målbart rum.

Eksempel 4.5. Her er nogle eksempler på sigma-algebraer

- Den trivielle sigma-algebra over en mængde X er $\{\emptyset, X\}$
- Den totale sigma-algebra over en mængde X er $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$
- Lad $A \subseteq X$. Da er $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ en sigma-algebra

Proposition 4.6. Lad $(X, \mathcal{A})$ være et målbart rum. Lad A og B samt $A_1, A_2, \dots$ være målelige mængder. Da er følgende mængder målelige

1. $A \cup B$
2. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$
3. $A \cap B$
4. $A \setminus B$

Bevis. Vi starter med nummer 1. Lad $B_1 = A$, $B_2 = B$ og $B_i = \emptyset$ for alle $i \geq 3$. Definitionen af en sigma-algebra giver os at

$$A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$$

Nu til nummer 2. Definer $B_i = A_i^c$. Da giver definitionen af en sigma-algebra at

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$$

Vi tager komplementet af dette og får det ønskede resultat.

Nummer 3 og 4 overlades til læseren. ■

Definition 4.7. Lad X være en mængde og $A \subseteq \mathcal{P}(X)$. Da kaldes $\sigma(A)$ sigma-algebraen frembragt af A og defineres ved

$$\sigma(A) = \bigcap_{\mathcal{A} \supseteq A} \mathcal{A}$$

hvor $\mathcal{A}$ er en sigma-algebra.

Definitionen ovenfor kan godt være svær at forstå. Den skal forstås som at $\sigma(A)$ er den mindste sigma-algebra der indeholder A .

Eksempel 4.8. Vi vil kigge på en meget berømt sigma-algebra der hedder Borel-sigma-algebraen. Vi vil kigge på Borel-sigma-algebraen over $\mathbb{R}$. Den noteres ofte $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vi lader $A = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Da er $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(A)$.

Vi vil vise at $[2,3] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vi har at $(1,3), (1,2) \in A$ og vi kan skrive

$$[2,3] = (1,3) \setminus (1,2)$$

så per proposition 4.6 er $[2,3] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

4.1 Opgaver

Opgave 4.1: Spor-sigma-algebraen

Lad $(X, \mathcal{A})$ være et målbart rum og $A \subseteq X$ en mængde. Vi definerer

$$\mathcal{B} = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{A}\}$$

Vis at $\mathcal{B}$ er en sigma-algebra over A .

Opgave 4.2:

Lad X være en mængde. Hvad kan du sige om $\mathcal{B}$ hvis $\{\emptyset, B, X\}$ er en sigma-algebra?

Opgave 4.3:

Færdiggør beviset for Teorem 4.6.

Opgave 4.4:

Hvilke af nedenstående mængder er Borel?

1) $(1,2)$

2) $\{1\}$

3) $\mathbb{N}$

4) $[1,2]$

5) $(-\infty, 1)$

6) $\mathbb{Z}$

7) $\mathbb{Q}$

Opgave 4.5:

Lad $B = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Vis at $\sigma(B) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

5 Litteraturliste

- [1] René L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*, chapter σ -algebras. Cambridge University Press, 2017.
- [2] Henrik Schlichtkrull. *Curves and Surfaces*. Department of Mathematical Sciences, 2018.