

Verdens smukkeste formel

En invitation til komplekse tal

Rasmus Jensen

Syddansk Universitet

September 2025

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Introduktion

I dag

1. Hvorfor komplekse tal?
2. Det komplekse plan og regler
3. Lidt om polære koordinater
4. Udledning af Eulers formel

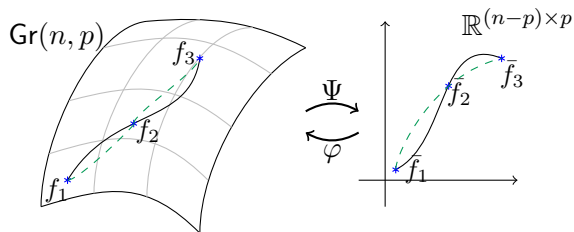
$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

$$z = re^{i\theta}$$

Introduktion



Om mig

- Rasmus, 26 år
- 3. års Ph.d.-studerende
- Kandidat i Anvendt Matematik fra SDU
- Arbejder med scientific computing, særligt Riemannian computing

Hvorfor komplekse tal?

Andengradsligningen

Betragt ligningen $ax^2 + bx + c = 0$.

Løsning:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

hvor $D = b^2 - 4ac$.

Hvorfor komplekse tal?

Andengradsligningen

Betragt ligningen $ax^2 + bx + c = 0$.

Løsning:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

hvor $D = b^2 - 4ac$.

Indtil i dag: Hvis $D \geq 0$ **nemt!** Hvis $D < 0$ **øv!**

Hvorfor komplekse tal?

Andengradslikningen

Betragt ligningen $ax^2 + bx + c = 0$.

Løsning:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

hvor $D = b^2 - 4ac$.

Indtil i dag: Hvis $D \geq 0$ **nemt!** Hvis $D < 0$ **øv!**

Efter i dag: Hvis $D \geq 0$ **nemt!** Hvis $D < 0$ **nemt!**

Hvorfor komplekse tal

Fra andengradsligningen og videre

- Beregning af løsninger til 3., 4. og n'te gradspolynomier:

Eksempel: $x^4 = 1$ har løsningerne $1, -1, i$ og $-i$.

Hvorfor komplekse tal

Fra andengradsligningen og videre

- Beregning af løsninger til 3., 4. og n'te gradspolynomier:

Eksempel: $x^4 = 1$ har løsningerne $1, -1, i$ og $-i$.

- Fouriertransformationen

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi it} dx.$$

Måske noget til en SRP?

- Cauchys integralformel; Løsning af en vigtig type integraler (*svært stof*).
- ... og mange andre ting.

Et komplekst tal

Definition (Komplekst tal)

Et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ er et tal på formen

$$z = a + bi,$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$.

- Tallet $a \in \mathbb{R}$ kaldes den réelle del af z
- Tallet $b \in \mathbb{R}$ kaldes den imaginære del af z .
- Det er ligemeget om vi skriver bi eller ib .

Et komplekst tal

Definition (Komplekst tal)

Et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ er et tal på formen

$$z = a + bi,$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$.

- Tallet $a \in \mathbb{R}$ kaldes den réelle del af z
- Tallet $b \in \mathbb{R}$ kaldes den imaginære del af z .
- Det er ligemeget om vi skriver bi eller ib .

Tal sammen: Hvordan skal vi definere '+'. '−'? Hvad med '·' og '/'?

Algebra med komplekse tal

Basale operationer

For to komplekse tal $u = a + bi$ og $v = x + yi$ definerer vi

- **Addition:** $u + v = (a + x) + (b + y)i$

Algebra med komplekse tal

Basale operationer

For to komplekse tal $u = a + bi$ og $v = x + yi$ definerer vi

- **Addition:** $u + v = (a + x) + (b + y)i$
- **Subtraktion:** $u - v = (a - x) + (b - y)i$

Algebra med komplekse tal

Basale operationer

For to komplekse tal $u = a + bi$ og $v = x + yi$ definerer vi

- **Addition:** $u + v = (a + x) + (b + y)i$
- **Subtraktion:** $u - v = (a - x) + (b - y)i$
- **Multiplikation:** Uledes ved hjælp af lidt algebra

$$\begin{aligned} uv &= (a + bi)(x + yi) \\ &= ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i \end{aligned}$$

Algebra med komplekse tal

Basale operationer

For to komplekse tal $u = a + bi$ og $v = x + yi$ definerer vi

- **Addition:** $u + v = (a + x) + (b + y)i$
- **Subtraktion:** $u - v = (a - x) + (b - y)i$
- **Multiplikation:** Udledes ved hjælp af lidt algebra

$$\begin{aligned} uv &= (a + bi)(x + yi) \\ &= ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i \end{aligned}$$

- **Division:**

$$\frac{u}{v} = \frac{a + bi}{x + yi}$$

Trick: Lav nævneren i brøken om til noget der kun er réelt, og ikke komplekst.

Algebra med komplekse tal

Kompleks konjugering og division

For alle $z = a + bi \in \mathbb{C}$ findes et komplekst konjugat $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Spørgsmål: Hvad skal man gange et komplekst tal z med, for at det bliver réelt?

Husk fra algebra med réelle tal a, b

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Algebra med komplekse tal

Kompleks konjugering og division

For alle $z = a + bi \in \mathbb{C}$ findes et komplekst konjugat $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Spørgsmål: Hvad skal man gange et komplekst tal z med, for at det bliver réelt?

Husk fra algebra med réelle tal a, b

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Løsning: Hvis $z = a + bi$, da

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Algebra med komplekse tal

Kompleks konjugering og division

For alle $z = a + bi \in \mathbb{C}$ findes et komplekst konjugat $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Spørgsmål: Hvad skal man gange et komplekst tal z med, for at det bliver réelt?

Husk fra algebra med réelle tal a, b

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Løsning: Hvis $z = a + bi$, da

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Tilbage til division:

$$\frac{u}{v} = \frac{a + bi}{x + yi} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{x^2 + y^2}$$

Algebra med komplekse tal

Et par eksempler

Hvis $z = 3 + i$ og $v = -2 + 3i$ så er $z + v$, zv og $\frac{z}{v}$?

Algebra med komplekse tal

Et par eksempler

Hvis $z = 3 + i$ og $v = -2 + 3i$ så er $z + v$, zv og $\frac{z}{v}$?

$$z + v = (3 - 2) + (1 + 3)i = 1 + 4i$$

$$\begin{aligned}zv &= (3 \cdot (-2) - 1 \cdot 3) + (3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2))i \\&= -9 + 7i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z}{v} &= \frac{z\bar{v}}{v\bar{v}} \\&= \frac{(3 + i)(-2 - 3i)}{(-2)^2 + 3^2} \\&= \frac{-3 - 11i}{13} = -\frac{3}{13} - \frac{11}{13}i\end{aligned}$$

Tilbage til andengradsligningen

Løs det uløselige

Betragt andengradsligningen $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 8 = 0$.

- Vi har formelen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.
- For vores ligning er $D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = 4 - 8 = -4$

Tilbage til andengradsligningen

Løs det uløselige

Betragt andengradsligningen $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 8 = 0$.

- Vi har formelen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.
- For vores ligning er $D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = 4 - 8 = -4 = 4i^2$

Tilbage til andengradsligningen

Løs det uløselige

Betragt andengradsligningen $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 8 = 0$.

- Vi har formelen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.
- For vores ligning er $D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = 4 - 8 = -4 = 4i^2$
- Dermed:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2 \pm 2i}{\frac{1}{2}} = 4 \pm 4i$$

Tilbage til andengradsligningen

Løs det uløselige

Betragt andengradsligningen $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 8 = 0$.

- Vi har formelen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.
- For vores ligning er $D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = 4 - 8 = -4 = 4i^2$
- Dermed:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2 \pm 2i}{\frac{1}{2}} = 4 \pm 4i$$

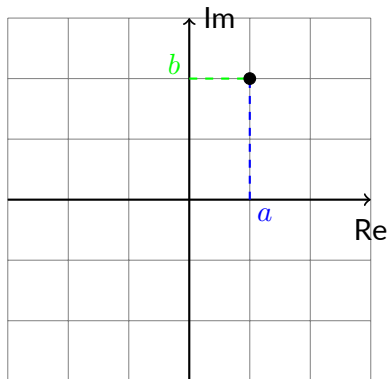
Opgave: Løs andengradsligningen $x^2 + 2x + 6 = 0$.

Det komplekse plan

Det komplekse plan

En model

Givet et komplekst tal $z = a + bi$, kan man indtegne det som et punkt i det komplekse plan.

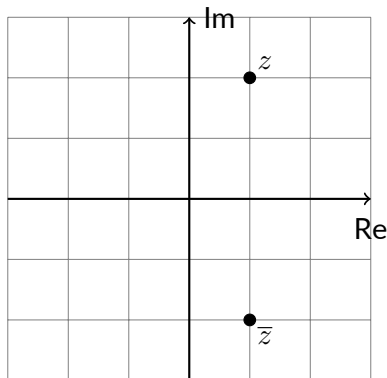


Det komplekse plan

Kompleks konjugering

Hvis $z = a + bi$ er $\bar{z} = a - bi$

kompleks konjugering $\Leftrightarrow$ spejling af punktet over den réelle akse Re



Det komplekse plan

På vej til polære koordinater

Vi kan bruge **analytisk plangeometri** fra 1.g til at beskrive vores nye yndlingstal $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Definition (Modulus)

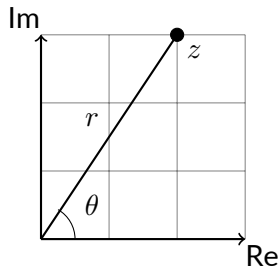
Længden af strengen fra orego til z :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definition

Vinkel mellem Re-aksen og linjen fra orego til z :

$$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$



Det komplekse plan

Et par resultater – tjek din viden

Husk: Hvis $z = a + bi$, så er $\bar{z} = a - bi$.

Husk ligeledes at $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lad $z, w \in \mathbb{C}$:

- $z\bar{z} \stackrel{?}{=} |z|^2$
- $|z + w| \stackrel{?}{=} |z| + |w|$
- $|zw| \stackrel{?}{=} |z||w|$ (Vink: Du kan frit bruge at $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$)

Det komplekse plan

Et par resultater – tjek din viden

Husk: Hvis $z = a + bi$, så er $\bar{z} = a - bi$.

Husk ligeledes at $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lad $z, w \in \mathbb{C}$:

- $z\bar{z} \stackrel{?}{=} |z|^2$
- $|z + w| \stackrel{?}{=} |z| + |w|$
- $|zw| \stackrel{?}{=} |z||w|$ (Vink: Du kan frit bruge at $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$)

Svar:

- **Ja!** Hvis $z = a + bi$: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- **Nej!** Men: $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Trekantsuligheden).
- **Ja!** For $|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$

Polære koordinater

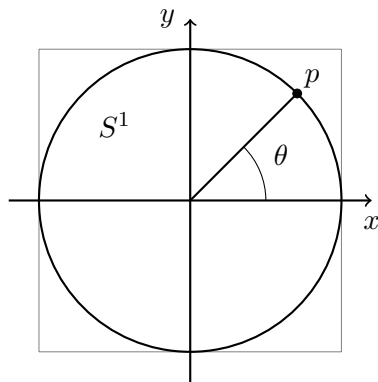
Cosinus og sinus – på speed!

Hvad er cosinus og sinus? *der er mange svar på dette!*

- Lad S^1 være enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$.
- Punktet p kan beskrives ud fra vinklen θ med x -aksen.

$$p = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

- Vi kan herfra definere eks. $\cos(\pi)$ som x -koordinatet for punktet med vinkel π radianer ift. x -aksen.
- Lommeregneren bruger en algoritme til at regne funktionerne ud.



Det komplekse plan

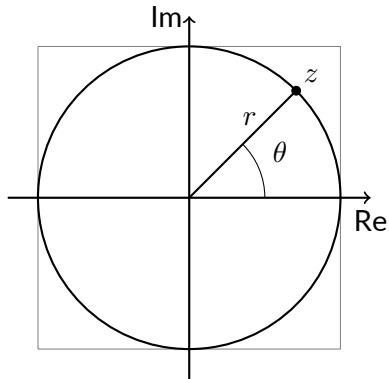
Polære koordinater

- Til alle $z = a + bi$ er der et r og θ sådan at

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

Detalje: θ ikke unik!

- At regne r ud er nemt, men θ kræver en lommeregner.



Eulers formel

Eulers formel

Hjørnестenen i komplekse tal

Vi vil gerne vise at vi, for alle $z \in \mathbb{C}$, at vi kan skrive

$$z = re^{i\theta},$$

for et passende r og θ .

- Vi viser ligheden som Euler gjorde.



Leonhard Euler, født 1707 i Basel.
Død 1783 i Sankt Petersburg)

Eulers formel

Ingrediens 1: Differentiation af cosinus og sinus

Ved lidt algebra og lidt geometri (det er ikke svært, men lidt langhåret), kan man komme frem til at

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Eulers formel

Ingrediens 1: Differentiation af cosinus og sinus

Ved lidt algebra og lidt geometri (det er ikke svært, men lidt langhåret), kan man komme frem til at

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

At bevise formlerne er ikke abstrakt, men hvis vi skal have alle detaljer med bliver det en lang aften.

Husk ydermere at $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$.

Eulers formel

Ingrediens 1: Differentiation af cosinus og sinus

Ved lidt algebra og lidt geometri (det er ikke svært, men lidt langhåret), kan man komme frem til at

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

At bevise formlerne er ikke abstrakt, men hvis vi skal have alle detaljer med bliver det en lang aften.

Husk ydermere at $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$.

Bemærk at $\frac{d^2}{dx^2} \cos(x) = -\cos(x)$ og $\frac{d^2}{dx^2} \sin(x) = -\sin(x)$

og endvidere $\frac{d^4}{dx^4} \cos(x) = \cos(x)$ og $\frac{d^4}{dx^4} \sin(x) = \sin(x)$

Eulers formel

Ingrediens 2: Taylorrækker (Motivation og eksempel)

- Nogle funktioner er svære at regne ud. Måske kan vi kun regne dem ud i få punkter.
- Lad $f(x)$ være en 'besværlig funktion'. Du er dog heldig! For $x = 0$ kan du regne f , f' , f'' og f''' ud.

Eulers formel

Ingrediens 2: Taylorrækker (Motivation og eksempel)

- Nogle funktioner er svære at regne ud. Måske kan vi kun regne dem ud i få punkter.
- Lad $f(x)$ være en 'besværlig funktion'. Du er dog heldig! For $x = 0$ kan du regne f , f' , f'' og f''' ud.
- Lad os prøve at finde en model $p(x)$ for $f(x)$, som samtidig er et *andengradspolynomium*.

$$f(x) \approx p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Eulers formel

Ingrediens 2: Taylorrækker (Motivation og eksempel)

- Nogle funktioner er svære at regne ud. Måske kan vi kun regne dem ud i få punkter.
- Lad $f(x)$ være en 'besværlig funktion'. Du er dog heldig! For $x = 0$ kan du regne f , f' , f'' og f''' ud.
- Lad os prøve at finde en model $p(x)$ for $f(x)$, som samtidig er et *andengradspolynomium*.

$$f(x) \approx p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

- Det følger at tallene a_0, a_1, a_2 og a_3 er

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}.$$

hvor $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Generelt $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Eulers formel

Ingrediens 2: Taylorrækker

Sætning (Taylorrække/Taylor's sætning omkring orego)

For en analytisk funktion¹ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gælder det at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Vi kalder objektet til højre for Taylorrækken for $f(x)$ omkring 0.

Opgave: Regn Taylorrækken ud for $\cos(x)$

¹Funktioner der opfører sig meget pænt (Julemanden kommer hvert år).

Eulers formel

Ingrediens 2: Taylorrækker

Sætning (Taylorrække/Taylor's sætning omkring orego)

For en analytisk funktion¹ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gælder det at

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Vi kalder objektet til højre for Taylorrækken for $f(x)$ omkring 0.

Opgave: Regn Taylorrækken ud for $\cos(x)$

- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$
- $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$

¹Funktioner der opfører sig meget pænt (Julemanden kommer hvert år).

Eulers formel

Ingrediens 3: Eksponentialfunktionen

Hvad er e^x ? Det er funktionen der differentieres til sig selv! Det viser sig at Taylorrækken for e^x omkring 0 er

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots,$$

...og nu er vi klar!

Eulers formel

En smart udregning

Vi har følgende Taylorrækker

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

Eulers formel

En smart udregning

Vi har følgende Taylorrækker

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

Strategi

1. Brug den polære form for et komplekst tal
2. Erstat cosinus og sinus med deres uendelige rækker
3. Sammenlign med den uendelige række for $re^{i\theta}$.

Eulers formel

En smart udregning

Vi vil gerne vise at $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \stackrel{!}{=} re^{i\theta}$:

Vi har på den ene side

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= r \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots + i \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Eulers formel

En smart udregning

Vi vil gerne vise at $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \stackrel{!}{=} re^{i\theta}$:

Vi har på den ene side

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= r \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots + i \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Vi har på den anden side

$$re^{i\theta} = r \left(1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \dots \right)$$

.

Eulers formel

En smart udregning

Vi vil gerne vise at $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \stackrel{!}{=} re^{i\theta}$:

Vi har på den ene side

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= r \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots + i \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Vi har på den anden side

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= r \left(1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \dots \right) \\ &= r \left(1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{7!}i\theta^7 + \dots \right). \end{aligned}$$

Eulers formel

En smart udregning

Vi vil gerne vise at $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \stackrel{!}{=} re^{i\theta}$:

Vi har på den ene side

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= r \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots + i \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Vi har på den anden side

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= r \left(1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \dots \right) \\ &= r \left(1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{7!}i\theta^7 + \dots \right). \end{aligned}$$

Eulers formel

En smart udregning

Vi vil gerne vise at $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \stackrel{!}{=} re^{i\theta}$:

Vi har på den ene side

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= r \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots + i \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Vi har på den anden side

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= r \left(1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \dots \right) \\ &= r \left(1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{7!}i\theta^7 + \dots \right). \end{aligned}$$

De to udtryk er altså ens!

Eulers formel

Kulminationen

Vi har nu bevist at for $z \in \mathbb{C}$ kan vi skrive

$$z = re^{i\theta}.$$

Vi kalder denne skriveform for *eksponentialformen*.

- Vi har lettere ved at arbejde med eksponentialformen end ved $z = a + bi$ -formen.
- θ er ikke unik, men det er ikke et problem her.

Lad os bruge eksponentialformen!

Eulers formel

Anvendelse

- **Potenser:** z^n for $n \in \mathbb{Z}$, kan man vise at

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i\theta n}.$$

- **Produkter:** $z \cdot w$

$$z \cdot w = (re^{i\theta})(te^{i\phi}) = (rt)e^{i(\theta+\phi)}.$$

Dette leder til De Moivres formel:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

- **Rødder** (Vi tager det på tavlen hvis der er tid.)

Eulers formel

Eulers identitet

Betragt $z = re^{i\theta}$ med $r = 1$ og $\theta = \pi$, $z = e^{i\pi}$.

Eulers formel

Eulers identitet

Betragt $z = re^{i\theta}$ med $r = 1$ og $\theta = \pi$, $z = e^{i\pi}$.

- Tallet ligger på enhedscirklen i $\mathbb{C}$ fordi $r = 1$.
- π radianer = 180 grader rotation.

Eulers formel

Eulers identitet

Betragt $z = re^{i\theta}$ med $r = 1$ og $\theta = \pi$, $z = e^{i\pi}$.

- Tallet ligger på enhedscirklen i $\mathbb{C}$ fordi $r = 1$.
- π radianer = 180 grader rotation.

Så hvad er $e^{i\pi}$ lig med?

Eulers formel

Eulers identitet

Betragt $z = re^{i\theta}$ med $r = 1$ og $\theta = \pi$, $z = e^{i\pi}$.

- Tallet ligger på enhedscirklen i $\mathbb{C}$ fordi $r = 1$.
- π radianer = 180 grader rotation.

Så hvad er $e^{i\pi}$ lig med? nemlig! -1

Opsamling

I aften har du set

- Hvad er et komplekst tal er,
- hvad kan man bruge det til (andengradsligninger og meget mere),
- polære koordinater,
- lidt om Taylorrækker,
- Eulers formel og Eulers identitet.

Opsamling

I aften har du set

- Hvad er et komplekst tal er,
- hvad kan man bruge det til (andengradsligninger og meget mere),
- polære koordinater,
- lidt om Taylorrækker,
- Eulers formel og Eulers identitet.

Et par steder at læse videre

- *Calculus* James Stewart. Jeg købte den selv i 2.g.
- Der er også et appendix om komplekse tal, som du kan finde online
https://www.stewartcalculus.com/media/6_inside_topics.php

Lidt om Institut for Matematik og Datalogi

Et par nyttige links

- Du kan læse matematik, datalogi og meget mere på SDU. Du kan finde en oversigt her https://www.sdu.dk/da/om-sdu/institutter-centre/imada_matematik_og_datalogi/uddannelse.
- Det er et godt studiemiljø – kom selv og oplev det som studerende for en dag (se https://www.sdu.dk/da/uddannelse/moedsdu/studerende_for_en_dag/nat_studerende_for_en_dag) eller til studiepraktik i November (se <https://www.sdu.dk/da/uddannelse/moedsdu/studiepraktik>).