Workshop i følger og rækker

Rasmus Frigaard Lemvig (rle@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 02-03-2022

I denne workshop vil vi give en introduktion til et særdeles sjovt og brugbart emne inden for matematisk analyse, nemlig følger og rækker. Vi starter med at introducere følger og se nogle eksempler. Derefter bevæger vi os videre til rækker, og vi skal specielt blive komfortable med udregning af geometriske rækker. Til slut kan I vælge mellem to emner, nemlig rækker for funktioner og konvergens af talfølger. Førstnævnte er mere anvendelses- og beregnings-orienteret. Det andet emne er mere teoretisk og skal give jer en fornemmelse for, hvordan man arbejder med abstrakt matematik.

1 Introduktion

Inden vi skal arbejde med følger og rækker, skal vi have noget grundlæggende notation på plads. En *mængde* i matematik er en samling af objekter kaldet *elementer*. Man skriver mængder med tuborgklammer, f.eks. er $\{1, 2, 3\}$ mængden med de tre elementer 1, 2 og 3. Hvis et element a ligger i mængden A, skriver vi $a \in A$. Hvis ikke, skriver vi $a \notin A$. F.eks. er $1 \in \{1, 2, 3\}$, mens $4 \notin \{1, 2, 3\}$. I dette forløb er vi primært interesseret i mængden

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

kaldet de *naturlige tal* samt de *reelle tal* $\mathbb{R}$, som består af alle decimaltal. I skal være velkomne til at tænke på $\mathbb{R}$ som ”alle tal”.

2 Følger

I denne sektion skal vi blive bekendte med talfølger. Vi skal se en række eksempler og derefter tale kort om, hvordan følger kan opføre sig. Mere præcist skal vi introducere begreberne *konvergens* og *divergens*. Vi starter med at definere, hvad en talfølge er.

Definition 2.1. (Talfølge) En talfølge er en samling af reelle tal $a_n \in \mathbb{R}$ indekseret ved de naturlige tal,

$$a_1, a_2, ...$$

Vi skriver $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for en talfølge.

Eksempel 2.2. Det simpleste eksempel på en talfølge er en konstant talfølge, f.eks.

$$1, 1, 1, 1, ...$$

hvilket vi også kan skrive som $a_n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel 2.3. Lad følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved $a_n = n$. Skrevet ud er følgen

$$1, 2, 3, 4, ...$$

Eksempel 2.4. Lad følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved $a_n = 1/n$. Skrevet ud er denne følge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$$

2.1 Operationer med følger

Ligesom vi kan lægge tal sammen og gange tal sammen, kan vi gøre det med følger. Helt formelt har vi følgende definition.

Definition 2.5. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være følger. Vi definerer følgende:

- Følgen $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har følgeelementer $a_n + b_n$.
- Følgen $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har følgeelementer $a_n \cdot b_n$.
- Følgen $\{a_n/b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ har følgeelementer a_n/b_n (hvor vi her må antage, at $b_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$).
- For et tal $c \in \mathbb{R}$ har følgen $\{ca_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ følgeelementer ca_n.

Definitionen siger blot, at summer og produkter af følger er præcist, hvad vi forestiller os.

Eksempel 2.6. Betragt de to følger med $a_n = n$ og $b_n = 1/n$. Da er produktet $a_n b_n = 1$ blot den konstante følge $1, 1, ...$ Sumfølgen $a_n + b_n$ er

$$1 + 1, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, ...$$

eller hvis vi udregner de første led:

$$2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, ...$$

2.2 Flere eksempler

Nogle gange er følger beskrevet ved et konkret udtryk. Dette var f.eks. tilfældet i alle tidligere eksempler. Men mange af de rigtig interessante følger beskrives bedst på anden vis. Dem skal vi se nærmere på her.

Eksempel 2.7. (Fibonaccitallene) Vi skal her se på Fibonacci-tallene, der er defineret såkaldt *rekursivt*. Det betyder, at et element i følgen er defineret ud fra tidligere elementer. Lad os betegne Fibonacci-følgen med $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Følgen konstrueres således: Lad $f_1 = 0$ og $f_2 = 1$. Derfra defineres $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ for alle $n \geq 3$. Sagt i ord, så er et element i følgen givet som summen af de to forrige elementer. De første Fibonacci-tal er

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

Fibonacci-tallene har man studeret længe, og faktisk eksisterer der en formel for det n'te Fibonaccital. Det n'te Fibonacci-tal givet ved

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right).$$

At udlede denne formel kræver lidt arbejde, men der er mange tilgange. F.eks. kan det gøres med lineær algebra eller kompleks analyse. Tallet

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

kaldes *det gyldne snit*.

Eksempel 2.8. (Kvadratrødder) I dag udregnes kvadratrødder blot med lommeregner. I gamle dage måtte man gå mere kreativt til værks. Lad $a > 0$. For at bestemme $\sqrt{a}$ kan vi starte med at komme med et gæt på $\sqrt{a}$. Lad os betegne dette gæt som b. Konstruér nu en talfølge på følgende vis: Lad $a_1 = b$ og

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}} \right).$$

Lad os tage et konkret eksempel og beregne en approksimation til $\sqrt{2}$. Vi lader vores startgæt være $a_1 = 2$. Vi udregner nu de første følgeelementer:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} \approx 1.416666667$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} \approx 1.414215686$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}\right) = \frac{665857}{470832} \approx 1.414213562$$

Vi kan se, at følgen meget hurtigt stabiliserer sig omkring 1.414. Et hurtigt tjek på en lommeregner viser også, at $\sqrt{2} \approx 1.414213562$, så allerede ved det femte følgeelement er vi på 9 decimalers præcision, hvilket er tilstrækkeligt i de fleste henseender.

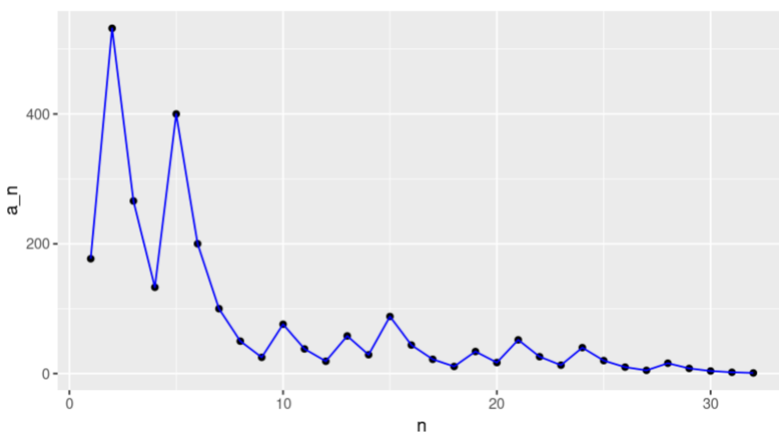
Eksempel 2.9. (Collatz-formodningen) Vi skal her se på en af de uløste problemer i matematik, den såkaldte *Collatz-formodning*, som også kaldes $3n+1$-*formodningen*. Vælg et vilkårligt positivt heltal m. Lad $a_1 = m$. Definér nu a_n for $n \geq 2$ på følgende vis:

$$a_n = \begin{cases} 3n+1 & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \frac{n}{2} & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases}.$$

For at tage et konkret eksempel, lad os starte med $a_1 = 1$. 1 er ulige, så $a_2 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$. 4 er lige, så $a_3 = 4/2 = 2$. 2 er lige, så $a_4 = 2/2 = 1$. Herfra gentager følgen sig selv, så den bliver

$$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Collatz-formodningen siger, at uanset hvilket positivt heltal, man starter med, vil følgen altid ramme 1. Trods mange års arbejde blandt mange matematikere ved vi endnu ikke, om dette er sandt. Herunder er en figur, der viser talfølgens opførsel, hvis man starter med $a_1 = 177$.



Figur 1: Følgeelementerne i Collatz-følgen for $a_1 = 177$. I dette tilfælde laver følgen 32 ”spring”, inden den rammer 1.

2.3 Opgaver

• **Opgave 2.1: Pell-tal**

Betragt talfølgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, hvor $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ og $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Denne talfølge kaldes *Pell-tallene*.

1) Udregn de første 10 Pell-tal.

2) Udregn $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ for $n = 2, 3, 4, 5$. Kan du se et mønster?

•• **Opgave 2.2: Flere Collatz-følger**

1) Find Collatz-følgen for $a_1 = 6$.

2) Find Collatz-følgen for $a_1 = 5$.

3) Find Collatz-følgen for $a_1 = 32$.

4) Hvordan ser en Collatz-følge ud, hvis man lader a_1 være en potens af 2?

3 Rækker

3.1 Summer

En række er en uendelig sum af (reelle) tal, $a_1 + a_2 + ...$ Det er derfor på sin plads at tale om endelige summer først og at få fastlagt notationen, vi senere skal bruge.

Definition 3.1. Lad $a_1, ..., a_n$ være reelle tal. Da er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n.$$

$\sum$ er et græsk bogstav, nemlig store sigma. $i = ...$ indikerer, hvor summen starter. I definitionen oven over starter den i 1, men den kunne lige så godt starte i 0 eller i -10 eller i noget helt tredje. Hvis i starter i 1, tager man først a_1. Derefter lægger man a_2 til, så lægger man a_3 til osv. indtil vi når til n, hvor vi stopper med at lægge tal til. Lad os straks se nogle eksempler på brugen af denne notation.

Eksempel 3.2. Vi har

$$\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Dette eksempel svarer til, at $a_i = i$ og $n = 6$ i definitionen oven over.

Eksempel 3.3. Vi har

$$\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 15.$$

Dette eksempel svarer til $a_i = i^2$ og $n = 3$ i definitionen oven over.

Eksempel 3.4. Hvad hvis vi vil skrive summen af de første 10 ulige positive tal? Disse er

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.$$

Som formel kan vi beskrive det i'te ulige tal som $2i - 1$. F.eks. er $2 \cdot 1 - 1 = 1$ det første ulige tal, $2 \cdot 2 - 1 = 3$ det andet ulige tal osv. Summen af de 10 første ulige tal er altså

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 1 + 3 + \cdots + 19.$$

Der findes en overraskende pæn formel for denne sum. Se opgaverne.

3.2 Nogle kendte summer og rækker

En type summer, der ofte dukker op, er såkaldte *geometriske summer*. I modsætning til tidligere plejer man at summere fra $i = 0$ i stedet for $i = 1$.

Definition 3.5. (Geometrisk sum) Lad $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$. Da kalder vi

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots x^n$$

en geometrisk sum.

Eksempel 3.6. For $x = 2$ og $n = 4$ fås den geometriske sum

$$\sum_{i=0}^{4} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$$

Eksempel 3.7. For $x = 1/2$ og $n = 3$ fås den geometriske sum

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Som regel er det besværligt at udregne summer for store værdier af n. Fordelen ved geometriske summer er, at vi har en formel for dem.

Sætning 3.8. *Lad $x \neq 1$ være et reelt tal. Da er*

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Hvis $x = 1$ er

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = n.$$

Bevis: Hvis $x = 1$ er

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} 1 = n.$$

Antag, at $x \neq 1$. Vi får den gode idé at gange summen $1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n$ med $(1 - x)$:

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - x(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - x - x^2 - \cdots - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

Da $x \neq 1$ er $1 - x \neq 0$, så vi kan dividere igennem med $1 - x$ og få

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

hvilket konkluderer beviset. ■

Vi kan nu beregne de geometriske summer fra før langt nemmere. For $x = 2$ og $n = 4$ fås

$$\sum_{i=0}^{4} 2^i = \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = \frac{1 - 32}{2 - 1} = \frac{-31}{-1} = 31,$$

og for $x = 1/2$ og $n = 3$ fås

$$\sum_{i=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1 - 1/2^4}{1 - 1/2} = \frac{16/16 - 1/16}{1/2} = \frac{15}{8}.$$

Begge disse resultater stemmer overens med vores beregninger fra før. Vi er nu parate til at se på *rækker*.

Definition 3.9. Lad $a_1, a_2, ...$ være en følge af reelle tal. Da kalder vi

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i$$

for en række.

Hvis du ikke kender til grænseværdier, skal du ikke være bekymret. Man kan sagtens tænke på en række som en sum af uendeligt mange tal. En geometrisk række er blot en række på formen

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

for et $x \in \mathbb{R}$. Ligesom med geometriske summer, hvor vi kun har endeligt mange led, har vi en formel for en geometrisk række. Den er endda simplere end den tilsvarende formel for en geometrisk sum.

Sætning 3.10. *Lad x være et reelt tal med $|x| < 1$ (altså $-1 < x < 1$). Da er*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Bevis: Idet $x \neq 1$, ved fra sætning 3.8, at

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Se nu på følgen x^{n+1}. Idet $|x| < 1$, kommer x^{n+1} tættere og tættere på nul, når n bliver større. Mere formel er grænseværdien af x^{n+1} for n gående mod uendelig lig nul, og dermed fås

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

hvilket beviser sætningen. ■

Bemærkning 3.11. I et af de valgfrie forløb til slut undersøger vi, hvad en grænseværdi af følger er mere formelt. Du er mere end velkommen til at tænke på det rent intuitivt indtil videre.

Lad os til slut nævne en anden vigtig type række, nemlig de såkaldte *p-rækker*. Det er rækker på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

hvor $p > 0$ er en konstant. Det viser sig, at denne række blot er lig uendelig for $p \leq 1$. For $p > 1$ er rækken lig et reelt tal, og for nogle værdier af p har summen en overraskende værdi. F.eks. er

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{og} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Et interessant tilfælde er for $p = 1$, hvor rækken som nævnt er lig uendelig. I dette tilfælde kaldes rækken *den harmoniske række*. Lad os bevise, at den er lig uendelig.

Sætning 3.12. *Den harmoniske række*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

er lig uendelig.

Bevis: Beviset er fra [2]. Antag, at den harmoniske række er et endeligt tal og kald dette S. Vi har

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Når n bliver større og større, vil både summen på venstre side og højre side gå mod S. Altså fås $S \geq 1/2 + S$ (formelt ved at tage grænseværdier på begge sider). Trækker vi S fra på begge sider (S er jo antaget at være et endeligt tal) fås $0 \geq 1/2$, men dette er noget vås. Vores antagelse om, at rækken er endelig, har altså ført til en modstrid. Vi konkluderer, at den harmoniske række må være uendelig.

■

Bemærkning 3.13. Man kunne håbe, at alle rækker, hvor leddene kommer tættere og tættere på nul, vil være et reelt tal. Den harmoniske rækker viser, at dette ikke er tilfældet.

Bemærkning 3.14. Når vi i dette afsnit har talt om, hvor vidt en række var et endeligt tal eller ej, er det upræcist sprogbrug. Det ville være mere korrekt at sige, at rækken konvergerer eller divergerer. Se det videre emne om konvergens af følger for flere detaljer.

3.3 Opgaver

- **Opgave 3.1:**
  Udregn følgende summer:

1)

$$\sum_{i=1}^{5} 2i$$

2)

$$\sum_{i=1}^{11} 4$$

3)

$$\sum_{i=3}^{5} i^2$$

•• **Opgave 3.2:**

1)Opskriv summen af de første 1000 lige tal med sumtegn.

2)Opskriv summen af de første 30 kubiktal med sumtegn. Husk, at et kubiktal er et heltal på formen k^3 for et positivt heltal k.

3)Opskriv summen af de første 100 tal i 7-tabellen med sumtegn.

•• **Opgave 3.3:**
I denne opgave skal I finde en formel for summen af de første n ulige positive heltal.

1)Udregn summen af de første n positive ulige heltal for $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

2)Kom med et bud på en formel.

3)Prøv at bevise din formel generelt. Tegn en tegning!

••• **Opgave 3.4:**
Find en formel for summen af de første n positive heltal, altså find et udtryk for $1 + 2 + \cdots + n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Det er en god idé at tegne en tegning og at tale med sidemakkeren.

•• **Opgave 3.5:**
Brug formlen, du fandt i forrige opgave til at finde en formel for de første n lige tal.

• **Opgave 3.6:**
Udregn følgende geometriske summer:

1)

$$\sum_{i=0}^{5} 3^i$$

2)

$$\sum_{i=0}^{4} (-4)^i$$

3)

$$\sum_{i=0}^{100} (-1)^i$$

• **Opgave 3.7:**
Udregn følgende geometriske rækker:

1)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}$$

2)

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1^i$$

3)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{5^i}$$

4)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(-7)^i}$$

●● **Opgave 3.8:**

Uendeligt mange matematikere fra HCØ skal ned og købe øl på Caféen?. Dog er de fattige studerende, så de har ikke råd til uendeligt mange øl, og de beslutter derfor at dele et endeligt antal øl. Den første matematiker vil have én øl, den næste en halv øl, den tredje en fjerdedel øl og så videre. Hvor mange øl skal de uendeligt mange matematikere splejse om?

●● **Opgave 3.9:**

Udregn følgende række:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^i} - \frac{5}{i^2} \right)$$

4 Videre emner

I kan nu vælge blandt to emner. Det første er meget anvendelses-orienteret og omhandler Taylorrækker. En lang række af de mest velkendte funktioner, f.eks. cosinus og sinus kan skrives som rækker. Det er dette faktum, der muliggør udregningen af disse funktioner for en computer eller lommeregner. I dette forløb fejer vi alle tekni-kaliteterne ind under gulvtæppet og regner løs! Dette forløb forudsætter kendskab til differentialregning. Det andet forløb er mere matematisk tung og omhandler definitionen af konvergens for følger. Dette forløb er til dem, der kan lide abstrakt matematik. I er naturligvis også velkomne til at arbejde med flere opgaver i de to dele om følger og rækker, vi startede med.

4.1 Rækker for funktioner

Se på funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

for $-1 < x < 1$. Vi ved, at vi kan skrive denne funktion som en række, nemlig

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Hvad er fordelen i dette? For denne funktion er det måske ikke så oplagt, men for andre er det særdeles nyttigt. Vi kan nemlig approksimere funktionen ved blot at tage tilstrækkeligt mange led med:

$$f(x) \approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^N,$$

hvor N er tilstrækkeligt stort. Dette sker i lommeregnere hele tiden for funktioner som cosinus, sinus og eksponentialfunktionen. Men hvordan finder man sådan en række? Lad os starte med at regne lidt på den geometriske række.

●● **Opgave 4.1:**
Vis, at for $-1 < x < 1$ kan funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

skrives som en række på følgende vis:

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

●● **Opgave 4.2:**
Find en række for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

for $-1 < x < 1$.

●● **Opgave 4.3:**
Find en række for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

for $-1 < x < 1$.

Hvad hvis vi ikke blot kan genkende en geometrisk række? Da skal vi bruge *Taylorrækker*.

Definition 4.1. Lad f være en funktion defineret i et interval $(-r, r)$ omkring 0, og antag at f er uendeligt ofte differentiabel. Da defineres Taylorrækken for f omkring 0 til

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots$$

hvor $f^{(n)}(0)$ er funktionen f differentieret n gange og evalueret i 0, og $n! = n\cdot(n-1)\cdots 1$ er fakultetsfunktionen med konventionen $0! = 1$.

Det interessante ved Taylorrækken er, at for alle tilstrækkeligt pæne funktioner (herunder alle funktioner, I møder i denne workshop) gælder det, at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

for x i $(-r, r)$. Dette er et fantastisk værktøj til at approksimere funktioner. Lad os tage et eksempel med en velkendt funktion.

Eksempel 4.2. Lad os udregne Taylorrækken for cosinus. Vi har

$$\begin{aligned} &\cos'(x) = -\sin(x), \quad \cos''(x) = -\cos(x), \\ &\cos'''(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x), \quad \cos''''(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

så cosinus' afledte gentager sig selv. Vi ser, at $\cos(0) = 1, \cos'(0) = 0, \cos''(0) = -1, \cos'''(x) = 0, \cos''''(0) = 1$, og herefter gentager mønsteret sig. Altså fås Taylorrækken

$$1 + 0x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots,$$

og vi kan skrive

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

•• **Opgave 4.4:**
Vis, at Taylorrækken for sinus er

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

•• **Opgave 4.5:**
Vis, at Taylorrækken for eksponentialfunktionen er

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Disse rækker benyttes alle i en lommeregner til at udregne disse funktioner i bestemte punkter. Lad os som eksempel se på $e^{2.5}$. Lommeregneren på min computer giver $e^e = 12.182493961$. Lad os benytte Taylorrækken for eksponentialfunktionen op til og med led nummer 10:

$$e^{2.5} \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{2.5^n}{n!} = 12.18174319.$$

10 led er meget lidt, og det tager ekstremt kort tid at udregne dette for en en computer. Med 100 led fås

$$e^{2.5} \approx \sum_{n=0}^{100} \frac{2.5^n}{n!} = 12.182493960,$$

hvilket giver otte decimalers præcision. En sidste interessant ting omkring rækker for funktioner er, at man kan differentiere funktionen ved at differentiere hvert led (givet nogle forudsætninger, der ofte er opfyldt). Vi illustrerer med et eksempel.

Eksempel 4.3. Vi viser, at $\cos'(x) = -\sin(x)$ ved at differentiere Taylorrækken for cosinus:

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}\end{aligned}$$

I sidste lighed brugte vi, at det første led i rækken er 0 (fordi vi ganger med $2 \cdot 0 = 0$), så vi kan i stedet lade indekset løbe fra 1. Vi har $(-1)^n = -(-1)^{n-1}$, og vi kan nu lave en forskydning, så summen starter i 0 i stedet for 1. Fortsættes udregningen fra før fås

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1-1}}{(2(n+1)-1)!} x^{2(n+1)-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x)\end{aligned}$$

som ønsket.

●●● **Opgave 4.6:**
Vis, at $(e^x)' = e^x$ ved at bruge Taylorrækken for e^x.

●●● **Opgave 4.7:**
Vis, at $\sin'(x) = \cos(x)$ ved at bruge Taylorrækker.

●●● **Opgave 4.8:**
Lad

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

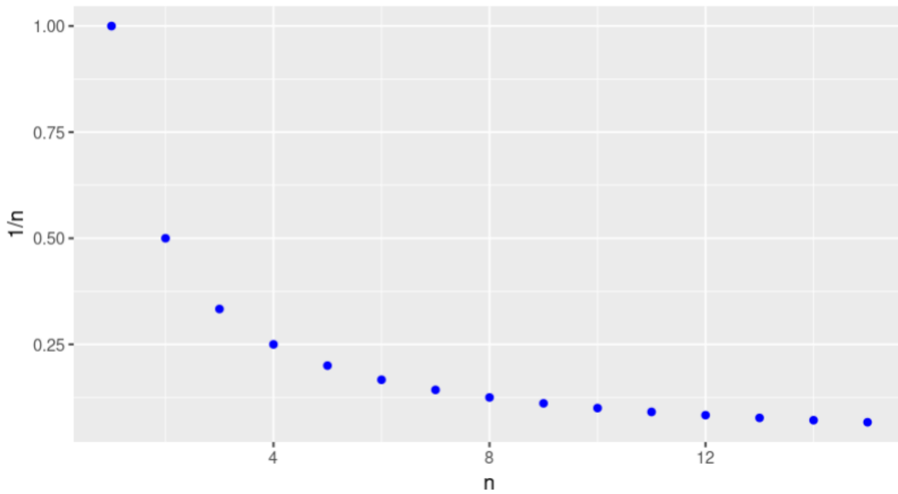
Bestem $f'(x)$ og find Taylorrækken for $f'(x)$.

4.2 Mere om konvergens af følger

Se på følgen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

fra tidligere. Vi kan se, at følgeelementerne bliver mindre og mindre, og det ligner, at de kommer tættere og tættere på 0, formelt at følgen *konvergerer* mod 0. Dette kan vi understøtte med en illustration:



Figur 2: Følgen $1/n$.

Hvordan skal vi definere konvergensbegrebet? Intuitivt skal konvergens betyde, at afstanden mellem følgeelementerne og konvergenspunktet (lad os kalde dette a), kan blive arbitrært lille, hvis blot vi kommer langt nok ude i følgen. Definitionen bliver som følger.

Definition 4.4. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge. Vi siger, at følgen konvergerer til $a \in \mathbb{R}$ hvis det for alle $\varepsilon > 0$ gælder, at man kan finde et $N \in \mathbb{N}$ (afhængigt af ε), så det for $n \geq N$ gælder, at $|a_n - a| < \varepsilon$. I symboler skriver vi konvergens som

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Hvis følgen ikke konvergerer, siger vi, at følgen divergerer.

ε er det græske bogstav epsilon. Ofte får man som studerende fortællingen, at det at bevise konvergens (mod punktet a) er som et spil mod din værste fjende. Din værste fjende giver dig et $\varepsilon > 0$, som du skal afparere. Du afparerer det ved at finde et $N \in \mathbb{N}$, så alle følgeelementer med indeks højere end N er tættere på a end ε (husk, at $|a - b|$ er afstanden mellem to tal a og b). Lad os se dette i praksis med følgen fra før.

Eksempel 4.5. Se på følgen $a_n = 1/n$. Vi ønsker at vise, at følgen konvergerer mod 0. Vores fjende giver os et $\varepsilon > 0$. Vi skal finde et $N \in \mathbb{N}$, så $|1/n - 0| < \varepsilon$, hvis blot $n \geq N$. Vi har $|1/n - 0| = 1/n$, så vi løser

$$1/N < \varepsilon$$

for N. Ganges med N på begge sider fås $1 < \varepsilon N$. Divideres med ε fås $N > 1/\varepsilon$. Vælg da N til at være et heltal større end $1/\varepsilon$. Da har vi for $n \geq N$, at

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

og vi har vist det ønskede.

• **Opgave 4.9:**
Bevis, at en konstant følge konvergerer ud fra definitionen af konvergens.

•• **Opgave 4.10:**
Bevis, at følgen $a_n = 1/n^2$ går mod nul ud fra definitionen af konvergens.

•• **Opgave 4.11:**

Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge, som på et tidspunkt bliver konstant. Mere præcist, der findes et $M \in \mathbb{N}$, så det for $n \geq M$ gælder, at $a_n = a$. Bevis, at følgen konvergerer.

•• **Opgave 4.12:**
Se på følgen $a_n = (-1)^n$. Tegn en tegning af de første følgeelementer. Konvergerer følgen? Giv et bevis for dit svar.

Når man skal bevise resultater for konvergens af følger, er følgende resultat helt uundværligt.

Sætning 4.6. ***(Trekantsuligheden)*** *For tal $a, b \in \mathbb{R}$ gælder $|a+b| \leq |a| + |b|$.*

• **Opgave 4.13:**
Tegn en tegning, der overbeviser dig om, at trekantsuligheden holder.

•• **Opgave 4.14:**
Bevis trekantsuligheden. Vink: Se på $(a+b)^2$ og tag kvadratrødder. Brug også, at $2ab \leq 2|a||b|$.

Lad os se lidt på summer af følger. Man kan jo håbe, at hvis a_n konvergerer til a og b_n konvergerer til b, at så vil også $a_n + b_n$ konvergere til $a + b$. Dette viser sig at være sandt.

Sætning 4.7. *Antag, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til a, og at $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til b. Da vil $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere til $a + b$.*

••• **Opgave 4.15:**
Lad $\varepsilon > 0$. Bevis sætningen i følgende trin:

1) Vis, at $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

2) Brug nu definitionen af konvergens til at vise, at der findes et $N_a \in \mathbb{N}$, så det for $n \geq N_a$ gælder $|a_n - a| < \varepsilon/2$. Gentag for den anden følge.

3) Færdiggør beviset for sætningen.

Ligeledes gælder følgende resultat.

Sætning 4.8. *Antag, at $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til a, og at $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til b*

- *Følgen $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til ab.*
- *Følgen $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til $a - b$.*
- *Følgen $\{a_n / b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer til a/b (såfremt $b_n \neq 0$ for alle n og $b \neq 0$).*

Bevis. Vi udelader beviset her, men I er velkomne til at prøve kræfter med at bevise det. Et bevis kan findes på side 34 og 35 i [2]. ■

Lad os til slut se på nogle konkrete regneopgaver, hvor I endelig skal benytte sætningen ovenover.

•• **Opgave 4.16:**
Vis, at disse følger konvergerer og find konvergenspunktet:

1)

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

2)

$$a_n = \frac{4n^2 + 6n + 10}{2n^2 - 11n}$$

3)

$$a_n = \frac{n^4 + 12n^3 - n}{n^5 + 34} + \frac{2}{n}$$

4)

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}$$

Vink: Det kan være smart i nogle af opgaverne at dividere tæller og nævner med en passende potens af n.

5 Litteraturliste og videre læsning

Notesættet [2] til kurset Analyse 1 på Københavns Universitet indeholder alt det grundlæggende omkring følger og rækker. En lærebog om blandt andet følger og rækker er Tom Lindstrøms Kalkulus [1].

[1] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. Universitetsforlaget, 2018. ISBN 978-82-15-02710-4.

[2] Søren Eilers, Matthias Christandl og Henrik Schlichtkrull. *Analyse 1*. 2022. URL `http://web.math.ku.dk/noter/filer/an1-22.pdf`.